

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

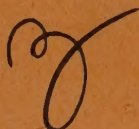
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès-SCIENCES

par

Serge DUBIGEON

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



ETUDE DE LA STABILITE DES ARBRES VERTICAUX DE GRANDE LONGUEUR

EN MOUVEMENT DANS UN MILIEU VISQUEUX

Soutenue le 2 juillet 1971 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. CHALEAT	}	Examineurs
M. VIVIER		
M. TARDY		
M. VILAIN		

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

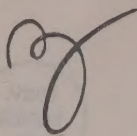
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès-SCIENCES

par

Serge DUBIGEON

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



ETUDE DE LA STABILITE DES ARBRES VERTICAUX DE GRANDE LONGUEUR

EN MOUVEMENT DANS UN MILIEU VISQUEUX

Soutenue le 2 juillet 1971 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. CHALEAT	} Examineurs
M. VIVIER	
M. TARDY	
M. VILAINE	

THESE

UNIVERSITEIT VAN LEIDEN

DE FAKULTEIT DER RECHTEN

DOCTORAL DEGREE

IN THE

SCIENCE OF



DE FAKULTEIT DER RECHTEN

DE FAKULTEIT DER RECHTEN

DE FAKULTEIT DER RECHTEN

DE FAKULTEIT DER RECHTEN

DE FAKULTEIT DER RECHTEN

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine
Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. MOLINARO

«

M. PAUC

«

M. PETRESCO

«

M. RAFFIN

«

M. VIVIER (E.N.S.M.)

«

M. TARDY (E.N.S.M.)

Mécanique

M. RAVILLY (E.N.S.M.)

«

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLOUD

«

M. COLLET

«

M. MINN

«

M. MEZENCEV (E.N.S.M.)

«

M. MOUTON

«

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

«

M. PIERI

«

M. QUINIOU

«

M. WOJTKOWIAK

«

Mlle DEBRAUX

Biologie

M. GARRIGUES

«

Mme LE DOUARIN

«

M. LE DOUARIN

«

M. SELLIER

«

M. CAVET

Sciences de la Terre

Mathématiques

Physique

«

«

«

Chimie

«

«

«

Biologie

«

Sciences de la Terre

Mathématiques

«

«

4

Mécanique

44

«

Physique

44

«

“

«

«

Chimie

«

«

«

Biologie

44

«

Sciences de la Terre

44



INTRODUCTION

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS

ÉTUDE GÉNÉRALE - ÉTUDE DANS LE CAS DE LA NOTATION PROPRE DE L'ARABE

TABLEAU 1

I - Sélectivité des lettres arabes	9
II - Mise en équation	9
II.1 - Équations générales	10
II.2 - L'écriture arabe - Étude de la notation des déplacements (D)	10
II.3 - Justification de certaines caractéristiques et aide de graphique des différents coefficients	19
III - Résolution arabe de l'équation (E)	19
III.1 - Méthode de l'approximation différentielle - Généralités	20
III.2 - Généralisation des résultats obtenus en (E) sur les valeurs propres et les fonctions propres	22
III.2.1 - Calcul des valeurs de λ et μ dans l'approximation à l'ordre n	22
III.2.2 - Conditions théoriques de stabilité	26
III.3 - Étude de quelques cas particuliers	27
III.4 - Cas d'une poutre soumise à un couple de torsion	29
III.4.1 - Étude des valeurs propres	30
III.4.2 - Étude des fonctions propres	32
III.5 - Cas d'une poutre soumise à un couple de torsion	37
III.5.1 - Résultats	37
III.5.2 - Résultats relatifs aux valeurs propres	40
III.5.3 - Résultats relatifs aux fonctions propres	40
Annexe I - La solution de l'équation (E) par des dérivées	47
Annexe II - La résolution de l'équation des déplacements (D) et la méthode de Laplace	55
Annexe III - Influence de la direction des angles d'extrémité sur les valeurs propres	61

SOMMAIRE

PAGES

INTRODUCTION

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

7

Première partie : ETUDE DANS LE CAS OU LA ROTATION PROPRE DE L'ARBRE EST NEGLIGEABLE

I - Schématisation du système physique	9
II - Mise en équations	9
II.1 - Equations générales	10
II.2 - Linéarisation - Détermination de l'équation aux déplacements (D)	14
II.3 - Justification de certaines hypothèses et ordre de grandeur des différents coefficients	17
III - Résolution approchée de l'équation (D)	19
III.1 - Nature de l'opérateur différentiel - Séparabilité	20
III.2 - Détermination des équations permettant de calculer les valeurs propres et les fonctions propres	22
III.2.1 - Calcul des matrices du système dans l'approximation à l'ordre p	24
III.2.2 - Conditions théoriques de stabilité	26
III.3 - Etude de quelques cas particuliers	27
III.4 - Cas d'une poutre non soumise à un couple de torsion	30
III.4.1 - Etude des valeurs propres	30
III.4.2 - Etude des fonctions propres	37
III.5 - Cas d'une poutre soumise à un couple de torsion	37
III.5.1 - Stabilité	37
III.5.2 - Résultats relatifs aux valeurs propres	40
III.5.3 - Résultats relatifs aux pseudo-pulsations réduites ω_R	46
Annexe I : La solution de l'équation 1 (D) par des développements en séries de puissances de ξ	51
Annexe II : La résolution de l'équation aux déplacements (D) et la méthode de Laplace	55
Annexe III : Influence de la direction des couples d'extrémités sur les valeurs propres	61

Deuxième partie : INFLUENCE DE LA ROTATION PROPRE D'UN ARBRE SOUMIS A
DES EFFORTS DE TORSION ET DE COMPRESSION SUR SES PULSATIONS
PROPRES.

I - Mise en équation	65
II - Résolution	68
II.1 - Solution exacte du cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\zeta = 0$	68
II.2 - Solution du cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\zeta \neq 0$	71
II.3 - Analyse des résultats précédents	73
II.3.1 - $\delta = 0$	73
II.3.2 - $\delta \neq 0$	74
II.3.2.1 - Cas non amorti	74
II.3.2.2 - Cas amorti	76
II.4 - Solution approchée dans le cas général	81
III - Analyse des résultats théoriques	83
III.1 - Influence du couple sur les pulsations réduites $ N $ lorsque l'effet de la pesanteur est négligé ($\alpha = 0$) , la poutre n'étant soumise à aucune force de compression ou de traction, l'amortissement externe ζ étant nul (fig. 21)	83
III.2 - Influence des forces de pesanteur et des forces de compression axiales (paramètres α et γ respectivement) sur les pulsations lorsque le couple appliqué est nul, les forces d'amortissement étant négligées (figures 22, 23, 24, 25, 26)	83
III.3 - Influence de l'amortissement externe ζ	90
Annexe IV : Méthode de calcul des valeurs propres -	93
Annexe V : Exemple d'utilisation des résultats précédents pour l'étude des pulsations propres d'un rotor flexible muni d'un volant	99
Troisième partie : VERIFICATION EXPERIMENTALE	
I - Description du dispositif expérimental	109
II - Résultats expérimentaux	110
II.1 - Résultats relatifs aux pulsations propres	110
II.2 - Résultats relatifs au « flambement »	111
II.3 - Résultats relatifs à la position des noeuds	114
II.4 - Résultats relatifs au coefficient d'amortissement	115
III - Analyse des résultats et conclusion	115
BIBLIOGRAPHIE	119

I N T R O D U C T I O N

Nous nous proposons ici de déterminer les pulsations propres et la stabilité du mouvement des arbres de grande longueur, tels que ceux utilisés dans l'industrie du pétrole (en particulier pour l'exploitation de gisements en mer) .

Ce problème est différent du problème classique de vibrations d'une poutre. Les forces de pesanteur ne sont plus négligeables ; le trépan de l'extrémité inférieure exerce certaines contraintes : un effort de compression et un moment ; enfin le milieu fluide dans lequel baigne l'arbre, exerce des actions de viscosité.

Monsieur le Recteur PIRONNEAU a attiré notre attention sur les travaux de CHIEN-HENG-WU [1] qui a effectué une mise en équation pour le système linéarisé.

Dans une première partie, nous montrerons comment les équations peuvent être simplifiées dans la mesure où la rotation propre de l'arbre est très faible. Nous serons conduits à un problème aux valeurs propres dont nous chercherons la solution sous forme de séries convergentes.

Dans la seconde partie de notre travail, nous étudierons l'influence de la rotation propre de l'arbre sans supposer que ses dimensions transversales soient beaucoup plus faibles que ses dimensions longitudinales.

Nous analyserons spécialement la stabilité et nous chercherons à déterminer les paramètres qui ont sur elle l'influence la plus sensible.

Si les conditions de stabilité ne sont pas remplies, l'arbre prend rapidement de grandes amplitudes et est détérioré sauf s'il est à l'intérieur d'un puits de forage limitant les amplitudes, auquel cas certaines zones restent en contact avec les parois.

L'étude du mouvement est beaucoup plus compliquée mais qualitativement doit présenter la même allure que celle des systèmes équivalents en basse fréquence, et plus simples, tels que ceux étudiés dans les articles [9] .

Nous tenons à remercier Monsieur le Recteur PIRONNEAU qui a bien voulu suivre nos travaux et nous a constamment encouragé tant sur le plan théorique, où, en particulier, il a su insister à juste titre auprès de nous sur la puissance de la méthode de GALERKIN et sur l'importance des phénomènes gyroscopiques, que sur le plan expérimental ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute notre gratitude.

Nous remercions Monsieur CHALEAT des conseils qu'il nous a prodigués et de l'intérêt qu'il a porté à nos travaux,

Nous adressons également nos remerciements à Messieurs VIVIER, TARDY et VILAINE de nous avoir fait l'honneur d'être les membres du jury.

Nous tenons à remercier le personnel du laboratoire de mécanique, de sa collaboration efficace et, en particulier, Monsieur FOURE, du travail parfois fastidieux qu'il a fait pour nous.

Nous ne saurions oublier de mentionner les services que nous ont rendus les Ingénieurs et les programmeurs du Centre de Calcul de l'E.N.S.M., et spécialement Monsieur PESEUX et Madame THOMAS qui ont mis au point tous les programmes.

Qu'il nous soit permis de féliciter le personnel de l'imprimerie pour l'excellente impression de ce travail.



LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

$\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$: unitaires du trièdre de référence fixe

s : abscisse curviligne d'un point de la ligne neutre

$M(s)$: point courant de la ligne neutre

x, y, z : coordonnées de M sur le trièdre $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

$\vec{t}$: unitaire tangent de la ligne neutre $\vec{t} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \equiv \vec{M}_s$

$\vec{C}(s)$ couple (C_x, C_y, C_z : composantes de $\vec{C}(s)$ sur $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$)

$\vec{F}(s)$ force (F_x, F_y, F_z : composantes de $\vec{F}(s)$ sur $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$)

S : section de l'arbre

ℓ : longueur de l'arbre

R : rayon de l'arbre

ρ : masse spécifique de l'arbre

ρ_m : masse spécifique du milieu ambiant

R_c : rayon de courbure en $M(s)$ de la déformée

$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ unitaires du trièdre de Frenet en $M(s)$

E : module d'Young

G : module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

I : moment d'inertie de la section S par rapport à un axe normal à la ligne neutre et la coupant

GJ : rigidité de torsion de l'arbre ($J = 2I$ pour une section circulaire)

$-F_0$: composante sur $\vec{z}$ de la force exercée par l'appui supérieur sur l'arbre (traction)

$-\Gamma$: composante sur $\vec{z}$ du couple résistant exercé par le sol sur l'arbre à son extrémité inférieure

Première partie

ETUDE DANS LE CAS OU LA ROTATION PROPRE DE L'ARBRE EST NEGLIGEABLE

I - SCHEMATISATION DU SYSTEME PHYSIQUE -

Nous considérons une poutre longue à axe de symétrie de révolution dont les dimensions transversales sont très faibles devant la longueur. L'hypothèse de Bernoulli est admise. Comme dans la théorie classique des poutres, nous négligeons les déformations dues à l'effort tranchant.

La poutre de densité ρ est verticale dans le champ de la pesanteur et est entraînée à son extrémité supérieure à vitesse angulaire constante ω_A . Elle exerce sur le sol un effort normal et un couple constant indépendant en module de la vitesse de rotation, engendré par le frottement et simulant l'action du trépan sur le sol.

L'ensemble est immergé dans un milieu de densité ρ_m .

Nous supposons que les liaisons aux extrémités sont assimilables à des rotules.

II - MISE EN EQUATIONS -

Soit $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ un trièdre trirectangle direct, z étant orienté selon la verticale descendante; la poutre a une extrémité au sommet de ce trièdre, l'autre sur $\vec{z}$.

Nous désignons par g l'intensité du champ de pesanteur.

Soit $M(s)$ un point de la ligne moyenne de la poutre de section S , s désignant l'abscisse curviligne comptée à partir de l'origine.

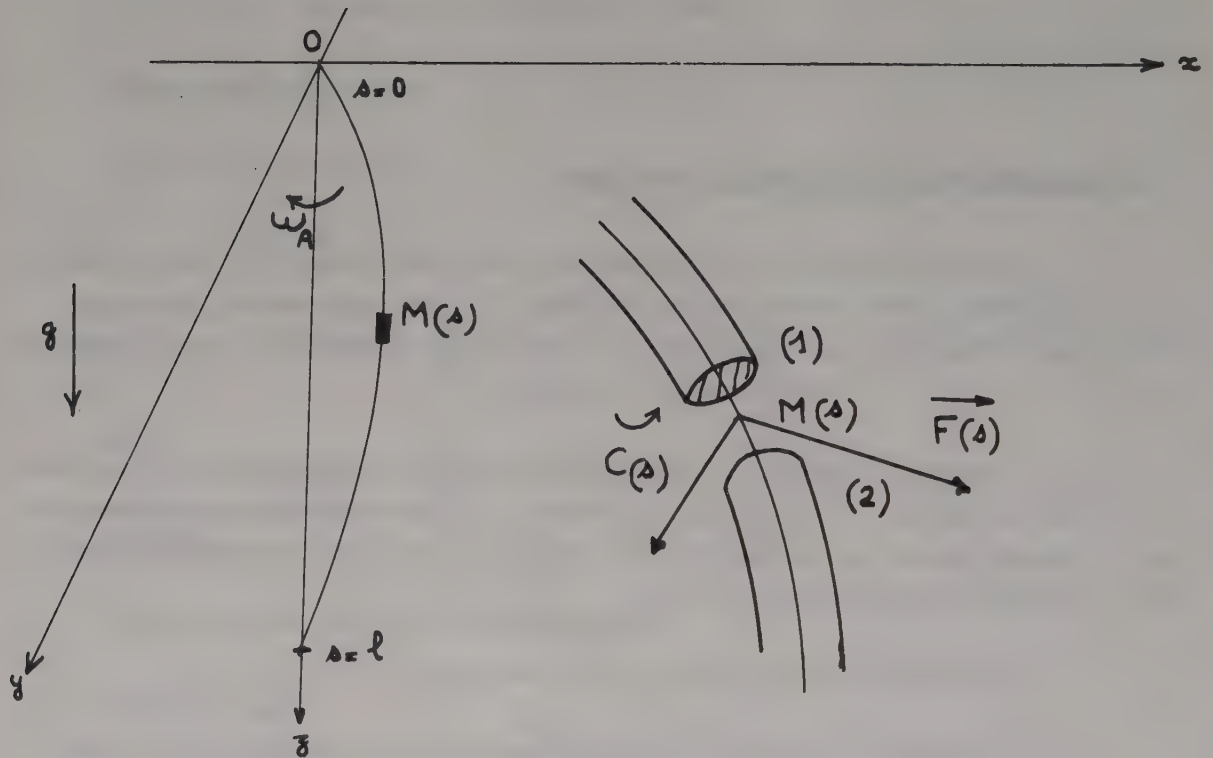
Le torseur $\{\vec{F}(s), \vec{C}(s)\}$ représente l'action du milieu (2) sur le milieu (1) au point $M(s)$ de la fibre neutre.

Nous isolons un élément de longueur ds et nous écrivons deux équations vectorielles du mouvement.

Soit $\vec{t}$ l'unitaire tangent à la ligne moyenne en $M(s)$

$$\vec{t} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}$$

Les dérivations par rapport au temps t seront notées par des points au-dessus des symboles.

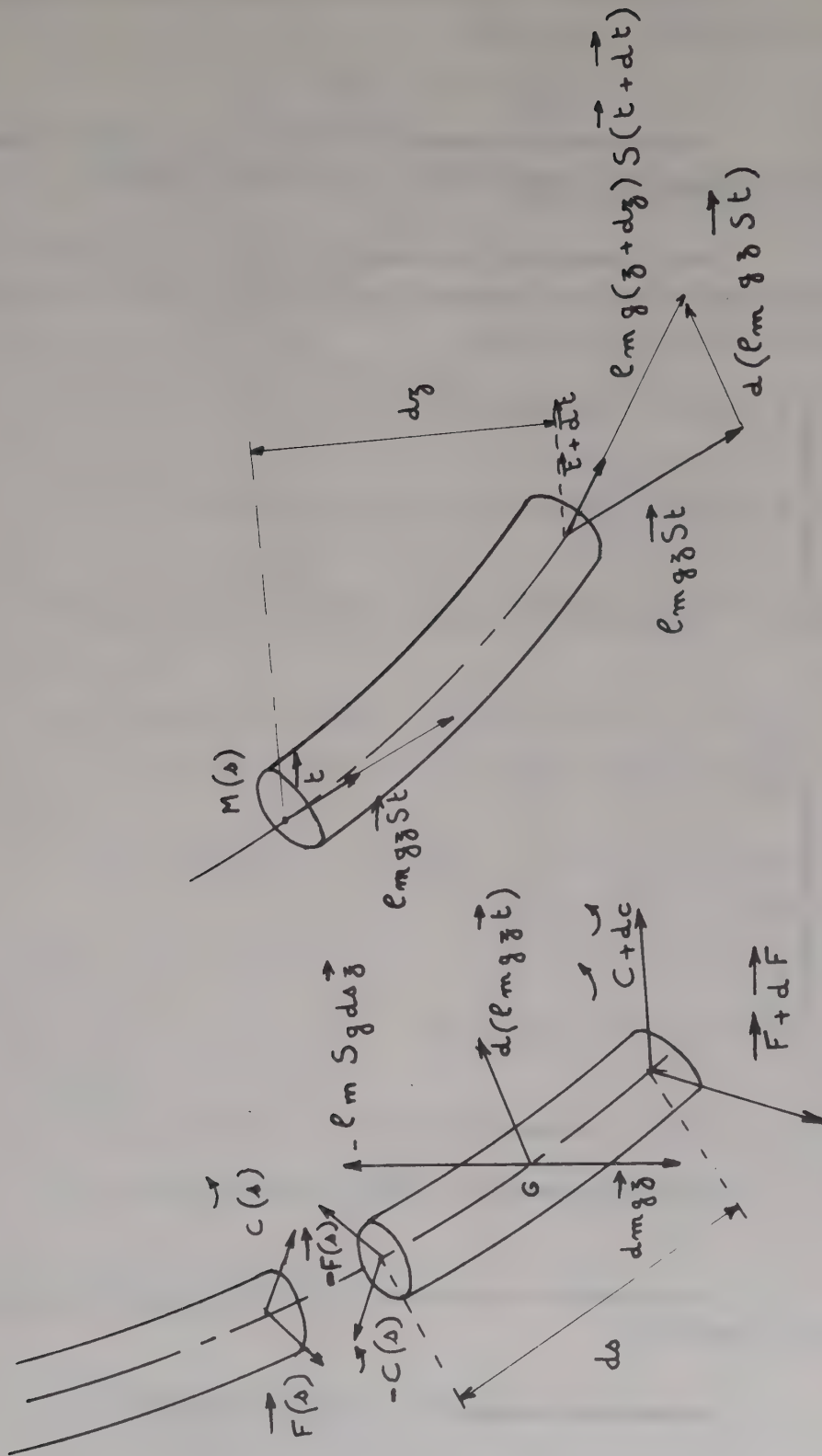


II.1 - Equations générales -

Equation du mouvement du centre de masse G -

$$dm \ddot{\vec{OG}} = dm g \vec{z} + d\vec{F} - b ds \dot{\vec{OG}} - \rho_m S g dz \vec{z} + d(\rho_m S g z \vec{t})$$

Le terme $b ds \dot{\vec{OG}}$ représente l'action du liquide visqueux et le terme $d(\rho_m S g z \vec{t})$ est la variation de la poussée d'Archimède entre les sections de cotes z et $z + dz$; la résultante des actions du milieu sur les parois de l'élément ds étant sensiblement nulle dans la mesure où il reste presque vertical.



Equation des moments par rapport au centre de masse -

Nous négligeons le moment dynamique puisque l'arbre a un élanement $\frac{\ell}{R}$ grand et une vitesse de rotation propre ω_A faible

$$d\vec{C} + \vec{t} ds \wedge \vec{F} = 0$$

Ceci suppose que les modes de flexion ont, pour ce système, des pulsations beaucoup plus faibles que les modes de vibrations longitudinales ou de torsion.

Nous disposons ainsi de six équations scalaires par projection sur le trièdre fixe. Il est inutile de projeter sur un trièdre mobile tournant autour de $\vec{z}$ à la vitesse de rotation ω_A puisque le moment dynamique est négligé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S ds \ddot{x} = \frac{\partial F_x}{\partial s} ds - b ds \dot{x} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_m g S z \frac{\partial x}{\partial s}) ds \\ \rho S ds \ddot{y} = \frac{\partial F_y}{\partial s} ds - b ds \dot{y} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_m g S z \frac{\partial y}{\partial s}) ds \\ \rho S ds \ddot{z} = \frac{\partial F_z}{\partial s} ds - b ds \dot{z} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_m g S z \frac{\partial z}{\partial s}) ds + (\rho - \rho_m) S g ds \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_x}{\partial s} + F_z \frac{\partial y}{\partial s} - F_y \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial C_y}{\partial s} + F_z \frac{\partial x}{\partial s} + F_x \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial C_z}{\partial s} + F_y \frac{\partial x}{\partial s} - F_x \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}$$

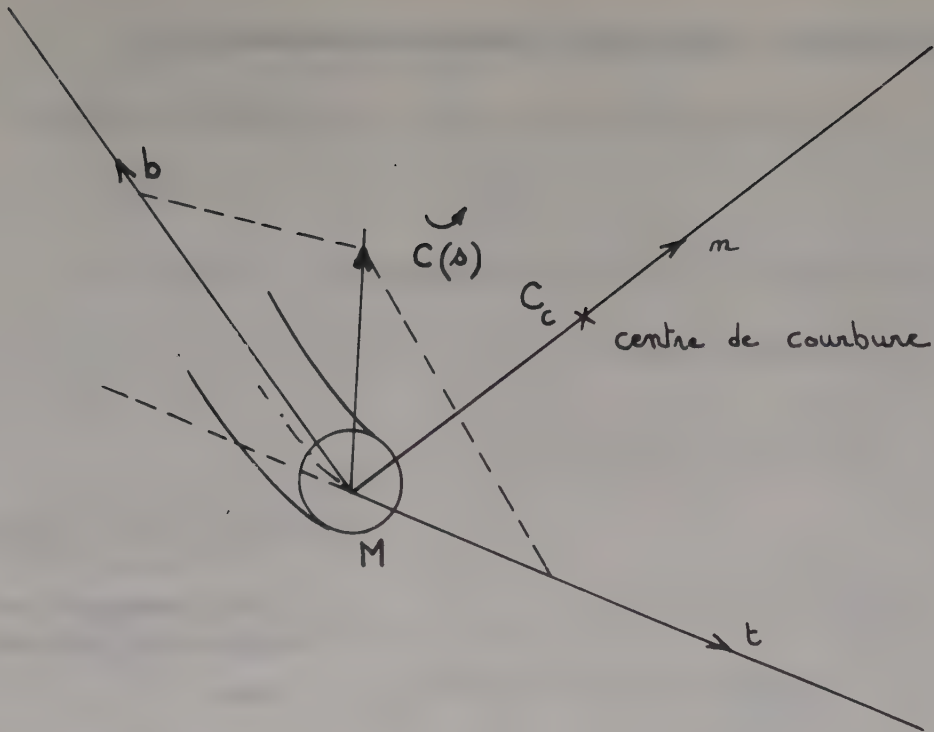
F_x, F_y, F_z désignant les composantes de $\vec{F}(s)$ sur le trièdre $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ et C_x, C_y, C_z désignant les composantes de $\vec{C}(s)$ sur le même trièdre.

Nous complétons ces équations par les relations approchées que nous donne la résistance des matériaux.

Relation entre le couple $\vec{C}(s)$ et le module d'Young E -

Considérons le trièdre de Frenet à l'abscisse s .

$\vec{C}(s)$ est dans le plan de la binormale $\vec{b}$ et de la tangente $\vec{t}$ à la ligne moyenne.



Soit $\vec{n}$ l'unitaire du troisième axe du trièdre de Frenet contenant le centre de courbure C_c .

Soit E le module d'Young du matériau, G son module de glissement, GJ la rigidité de torsion de l'arbre de section circulaire, I le moment d'inertie de la section S par rapport à un axe normal à la fibre neutre.

$$\text{Nous avons } \vec{C} \cdot \vec{n} = 0 \quad \vec{C} \cdot \vec{b} = \frac{EI}{R} \quad \vec{C} \cdot \vec{t} = GJ \frac{d\phi}{ds}$$

R étant le rayon de courbure MC_c et $\phi(s)$ la torsion de la poutre, paramètre que nous négligeons.

$$\text{Alors } \vec{C} \wedge \vec{t} = \lambda \vec{n}$$

$$\text{et } |\vec{C} \wedge \vec{t}| = |\vec{C} \cdot \vec{b}|$$

$$\text{Donc } \vec{C} \wedge \vec{t} = \frac{EI}{R} \vec{n} = EI \frac{d^2 \vec{M}}{ds^2}$$

$$\vec{C} \wedge \vec{t} = EI \frac{d^2 \vec{M}}{ds^2}$$

$$\text{Soit : } C_y \frac{dz}{ds} - C_z \frac{dy}{ds} = EI \frac{d^2 x}{ds^2} \quad (7)$$

$$C_z \frac{dx}{ds} - C_x \frac{dz}{ds} = EI \frac{d^2 y}{ds^2} \quad (8)$$

$$C_x \frac{dy}{ds} - C_y \frac{dx}{ds} = EI \frac{d^2 z}{ds^2} \quad (9)$$

II.2 - Linéarisation - Détermination de l'équation aux déplacements (D) -

Dans l'hypothèse des petits mouvements, nous linéarisons en écrivant

$$ds \sim dz$$

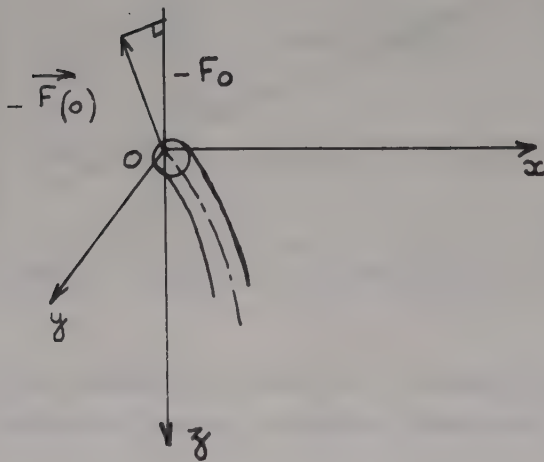
$$s \sim z$$

$$\ddot{z} = 0$$

$$\dot{z} = 0 \text{ (O fixe)}$$

L'équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial F_z}{\partial s} + (\rho - \rho_m) S g + S \rho_m g = 0$$



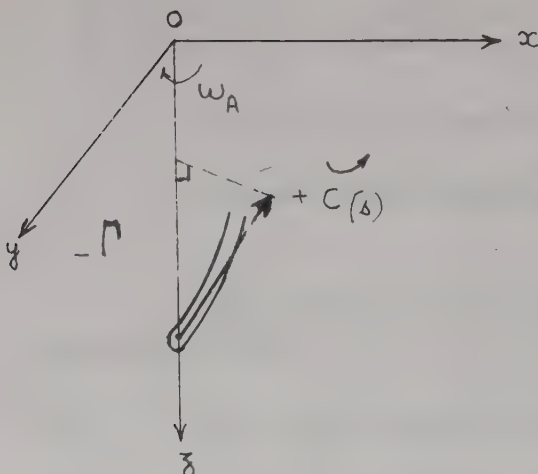
$$\text{Soit } F_z = F_0 - \rho g s S \quad (3)$$

F_0 est la composante verticale de la force exercée par l'arbre sur l'appui.

$-F_0$ représente la composante verticale de la force exercée à l'extrémité supérieure de l'arbre.

L'équation (6) devient :

$$\frac{\partial C_z}{\partial s} = 0 \text{ au deuxième ordre près.}$$



En effet, pour le système non déformé

$$F_x, F_y, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \text{ s'annulent en même temps.}$$

$$C_z = -I \quad (6)$$

I est la composante verticale du couple $-C(s)$ exercé par le système sur le sol. Ce couple I est positif si ω_A l'est.

Les relations (7) et (8) s'écrivent, après dérivation par rapport à s

$$\frac{\partial C_y}{\partial s} = EI \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + I \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 C_x}{\partial s^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \Gamma \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} \quad (8)$$

La relation (9) donne $0 = 0$ au second ordre près.

Les équations (5), (4), (1) et (2) deviennent, compte tenu de ces résultats :

$$\frac{\partial F_x}{\partial s} = -\frac{\partial^2 C_y}{\partial s^2} + (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \rho g S \frac{\partial x}{\partial s} \quad (5)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial s} = \frac{\partial^2 C_x}{\partial s^2} + (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \rho g S \frac{\partial y}{\partial s} \quad (4)$$

$$\rho S \ddot{x} + \rho g S \frac{\partial x}{\partial s} - (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} - \Gamma \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + b \dot{x} - \rho_m S g \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\rho S \ddot{y} + \rho g S \frac{\partial y}{\partial s} - (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \Gamma \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} + b \dot{y} - \rho_m S g \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial y}{\partial s} \right) = 0 \quad (2)$$

Les conditions aux limites sont :

$$s = 0 \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ C_x = 0 & C_y = 0 \end{cases} \quad s = l \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ C_x = 0 & C_y = 0 \end{cases}$$

Nous faisons l'hypothèse que les rotules ne peuvent transmettre qu'un couple vertical : celui créé par un moteur à l'extrémité supérieure et celui dû au frottement du sol à l'extrémité inférieure.

Compte tenu des relations (7) et (8), ces conditions s'écrivent

$$s = 0 \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ EI \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, t) = \Gamma \frac{\partial y}{\partial s}(0, t) \\ EI \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0, t) = -\Gamma \frac{\partial x}{\partial s}(0, t) \end{cases} \quad s = l \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ EI \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(l, t) = \Gamma \frac{\partial y}{\partial s}(l, t) \\ EI \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(l, t) = -\Gamma \frac{\partial x}{\partial s}(l, t) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) permettent de déterminer la déformée, compte tenu des conditions aux limites précédentes. Elles se ramènent à une seule équation en posant :

$$U(s) = x + iy \text{ avec } i^2 = -1$$

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial s^4} + i \Gamma \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} + (\rho - \rho_m) g S \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial U}{\partial s} \right) - F_0 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \rho S \ddot{U} + b \dot{U} = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(0,t) = -i \frac{\Gamma}{EI} \frac{\partial U(0,t)}{\partial s} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} U(l,t) = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(l,t) = -i \frac{\Gamma}{EI} \frac{\partial U(l,t)}{\partial s} \end{cases}$$

Passons en variables sans dimension en posant :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{s}{l} = \xi \\ 0 \leq \xi \leq 1 \end{array} \right.$$

et pour simplifier l'écriture, désignons les dérivations par rapport à ξ par des exposants symboliques.

Nous obtenons après multiplication par $\frac{l^4}{EI}$

$$U^{(4)} + i \frac{\Gamma l}{EI} U^{(3)} + (\rho - \rho_m) g \frac{s l^3}{EI} (U^{(1)})^{(1)} - \frac{F_0 l^3}{EI} U^{(2)} + \frac{\rho s l^4}{EI} \ddot{U} + \frac{b l^4}{EI} \dot{U} = 0$$

Passons en temps réduit τ et introduisons des coefficients sans dimension :

$$\tau = \Omega t \quad \text{avec } \Omega^2 = \frac{EI}{\rho s l^4} = \frac{EI}{l^3 M_0}, \quad M_0 \text{ désignant la masse de l'arbre}$$

$$\beta = \frac{\Gamma l}{EI}$$

$$\gamma = \frac{F_0 l^3}{EI}$$

$$2\zeta = \frac{b l^4}{EI} = \frac{b}{\rho s \Omega}$$

$$\alpha = (\rho - \rho_m) g \frac{s l^3}{EI} = \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho}\right) \frac{g}{l \Omega^2}$$

$$\alpha = \rho g s l \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho}\right) \frac{l^3}{EI} = P_a \frac{l^3}{EI} \quad P_a \text{ désignant le poids apparent de l'arbre immergé}$$

Désignant par des accents, les dérivations par rapport au temps τ , nous obtenons facilement l'équation aux déplacements (D)

$$\boxed{U^{(4)} + i \beta U^{(3)} + \alpha (U^{(1)})^{(1)} - \gamma U^{(2)} + U'' + 2\zeta U' = 0} \quad (D)$$

avec comme conditions aux limites

$$\left| \begin{array}{ll} U(0,\tau) = 0 & U^{(2)}(0,\tau) = -i \beta U^{(1)}(0,\tau) \\ U(1,\tau) = 0 & U^{(2)}(1,\tau) = -i \beta U^{(1)}(1,\tau) \end{array} \right.$$

II.3 - Justification de certaines hypothèses et ordre de grandeur des différents coefficients -

Nous avons négligé les déformations longitudinales, la déformation due à l'effort tranchant et les rotations des différentes sections les unes par rapport aux autres.

Calculons les rapports des carrés des pulsations des premiers modes de vibrations longitudinales ω_{0L}^2 et de torsion ω_{0T}^2 pour un arbre circulaire plein de rayon R au carré du mode fondamental de flexion ω_{0F}^2 . Dans ce cas $I = \frac{SR^2}{4}$.

$$\frac{\omega_{0L}^2}{\omega_{0F}^2} = \frac{l^4 S \rho \pi^2 E}{\pi^4 EI \rho l^2} = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2$$

$$\frac{\omega_{0T}^2}{\omega_{0F}^2} = \frac{l^4 S \rho \pi^2 G}{\pi^4 EI \rho l^2} = \frac{4}{\pi^2} \frac{G}{E} \left(\frac{l}{R} \right)^2$$

Pour un rapport $\frac{l}{R}$ de l'ordre de 100 ou plus, ces quotients restent supérieurs à 10 ce qui justifie, au moins pour les premiers modes de flexion, les approximations faites.

L'arbre subit une légère déformation longitudinale statique, l désigne sa longueur après déformation.

La déformation statique en torsion sous l'effet du couple est répartie le long de l'axe de la poutre de façon uniforme, mais nous pouvons négliger les variations $\frac{\partial \phi(s)}{\partial t}$.

■ Ordre de grandeur du paramètre de couple β -

Pour un arbre circulaire en acier, en mouvement dans l'eau, admettons que la contrainte maximale à la torsion ne doive pas dépasser 10 Kg/mm² soit 10⁸ Newton/m².

$$\text{Nous aurons } \frac{\Gamma R}{J} < 10^8$$

$$\text{avec } J = \frac{SR^2}{2}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad I = \frac{SR^2}{4}$$

$$\text{Soit } \beta < \Gamma_{\max} \frac{l}{EI}$$

$$\beta < \frac{10^8}{2 \cdot 10^{11}} \frac{J}{R} \frac{l}{I}$$

$$\beta < 10^{-4} \frac{l}{R}$$

★ β est de l'ordre de quelques unités.

■ **Ordre de grandeur du coefficient de poids apparent α -**

$$\alpha = (\rho - \rho_m) g \frac{S \ell^3}{EI} = P_a \frac{\ell^2}{EI}$$

$$\alpha = (\rho - \rho_m) \frac{9 \ell^3 4 S}{E S R^2}$$

$\rho - \rho_m$ est de l'ordre de $7 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$

α est de l'ordre de :

$$\frac{7 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot \ell}{10^{11}} \left(\frac{\ell}{R}\right)^2 = \frac{14}{10} \cdot 10^{-6} \ell \cdot \left(\frac{\ell}{R}\right)^2$$

Soit de quelques centaines pour $\left(\frac{\ell}{R}\right) = 10^3$

■ **Ordre de grandeur de γ/α -**

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{F_0}{P_a}$$

Le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ est égal à celui de F_0 au poids apparent de l'arbre et n'excède pas en général l'unité.

Si $\frac{\gamma}{\alpha} = 1$ l'arbre est partout en traction

Si $\frac{\gamma}{\alpha}$ est inférieur à l'unité, dans une section d'abscisse $\xi = \frac{\gamma}{\alpha}$, l'effort normal est nul, la partie supérieure de l'arbre est en traction, la partie inférieure en compression.

Si $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$, l'arbre est partout en compression.

■ **Ordre de grandeur du coefficient d'amortissement ζ -**

Le coefficient ζ est connu par l'expérience : de l'ordre de 10^{-3} dans l'air, 0,2 dans l'eau, et supérieur à l'unité dans un milieu vaseux.

Finalement, nous prenons les limitations suivantes

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq \beta \leq 10 \\ 0 \leq \alpha \leq 10^3 \\ 0 \leq \gamma \leq \alpha \quad \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 \leq \zeta \leq 10 \end{array} \right.$$

III - RESOLUTION APPROCHEE DE L'EQUATION (D) -

Pour $\xi = \frac{\gamma}{\alpha}$ inférieur à l'unité, l'équation possède un point singulier, point de branchement des différentes solutions.

CHIEN-HENG-WU [réf. 1], TSENG HUANG et DAREING [réf. 11] ont cependant étudié le problème dans certains cas particuliers : lorsque la poutre est partout en compression ou partout en traction. La méthode de séparation des variables ξ et τ et l'utilisation de la méthode de FROBENIUS pour l'équation en ξ , aboutissent finalement au calcul d'un déterminant dont les coefficients sont des séries infinies dont la sommation est pratiquement insoluble.

Une solution approchée peut cependant être trouvée en tronquant les séries à l'approximation désirée et les Auteurs ont mis en évidence un amortissement critique lorsque le couple Γ n'est pas nul. Lorsque le couple Γ est nul, les calculs ont été effectués pour différents cas de conditions aux extrémités (extrémités libres, rotules, encastrement) et leurs résultats sont en accord avec ceux que nous avons obtenus pour ces cas particuliers sans points de branchement dans l'équation. On trouvera un exposé de leurs travaux dans l'Annexe I.

Le succès de la méthode précédente tient à ce que les développements en série convergent dans l'intervalle $0 < \xi < 1$, ce n'est plus le cas si $0 < \frac{\gamma}{\alpha} < 1$ et Tseng Huang et Dareing, en essayant d'aborder le problème d'une façon différente, ont utilisé la méthode de LAPLACE [réf. 2] : Ils ont été conduits à des intégrations dans le plan complexe sur des contours de types déjà étudiés dans des cas plus simples : l'équation aux déplacements est, en effet, semblable à l'équation de Orr-Sommerfeld associée à un problème d'hydrodynamique analysé par LIN C C, WASOW, RABENSTEIN et JOSEPH [réf. 3, 4, 5, 10].

Sur un contour, l'étude met en lumière la contribution des fonctions de Clifford

$$C_n(\xi) = (-1)^n \xi^{-\frac{n}{2}} J_n(2\xi^{\frac{1}{2}}) \text{ où } J_n \text{ est fonction de Bessel.}$$

La fonction C_0 régit les mouvements de vibration autour de la verticale d'une chaîne pesante, mais il ne semble pas qu'on puisse en tirer, dans le cas général, des conclusions pour le problème qui nous concerne.

Mais, outre que les solutions explicites en fonction des valeurs propres, ont plusieurs déterminations, on serait amené, pour satisfaire les conditions aux limites, à résoudre des équations transcendantes faisant intervenir des fonctions de Hankel, termes de solutions asymptotiques obtenues par la méthode de « Steepest descent ». A notre connaissance, les travaux dans cette voie n'ont pas été poursuivis. Nous avons résumé les résultats actuels dans l'Annexe II.

La méthode théorique précédente semblant relativement compliquée, nous avons préféré trouver des solutions approchées par la méthode de Galerkin.

III.1 - Nature de l'opérateur différentiel - Séparabilité -

♦ L'opérateur différentiel est séparable; en effet, cherchons une solution particulière sous la forme d'un produit d'une fonction de τ par une fonction de ξ .

$$U = V(\xi) W(\tau)$$

L'équation (D) s'écrit :

$$\{V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha [\xi V^{(1)}]^{(1)} - \gamma V^{(2)}\} W(\tau) + V(W'' + 2\xi W') = 0$$

Soit après division par $V W$:

$$\frac{V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha [\xi V^{(1)}]^{(1)} - \gamma V^{(2)}}{V} = - \frac{W'' + 2\xi W'}{W} = \lambda$$

où λ désigne une constante complexe.

D'où

$$\begin{cases} V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha [\xi V^{(1)}]^{(1)} - \gamma V^{(2)} = \lambda V & 1_{(D)} \\ W'' + 2\xi W' + \lambda W = 0 & 2_{(D)} \end{cases}$$

Nous sommes conduits à un problème aux valeurs propres λ pour l'équation de déformation (1)_D, l'équation (2)_(D) déterminant la stabilité du mode propre associé.

♦ Avant de calculer les premières valeurs propres λ , nous allons étudier l'opérateur différentiel L mis en évidence dans l'équation (1)_D et vérifiant

$$L V = \lambda I V$$

où I est l'opérateur unitaire défini positif.

Soient u et v , deux fonctions de comparaison vérifiant les conditions aux limites du problème.

Avec les notations habituelles du produit scalaire, nous avons :

$$\langle L(u), v \rangle = \int_0^1 L(u) v^* d\xi$$

où v^* désigne la quantité conjuguée de v .

$$\langle L(u), v \rangle = \int_0^1 v^* [u^{(4)} + i\beta u^{(3)} + \alpha [\xi u^{(1)}]^{(1)} - \gamma v^{(2)}] d\xi$$

$$\langle u, L(v) \rangle = \int_0^1 u (L(v))^* d\xi$$

$$\langle u, L(v) \rangle = \int_0^1 u [v^{(4)} - i\beta v^{(3)} + \alpha [\xi v^{(1)}]^{(1)} - \gamma v^{(2)}] d\xi$$

$$\begin{aligned} \langle L(u), v \rangle - \langle u, L(v) \rangle = & \int_0^1 \{ (v^* u^{(4)} - u^* v^{(4)}) + i \beta (v^* u^{(3)} + u^* v^{(3)}) + \\ & + \alpha [v^* [\xi u^{(1)}] - [\xi v^{(1)}] u] - \gamma (v^* u^{(2)} - u^* v^{(2)}) \} d\xi \end{aligned}$$

Nous intégrons par parties successivement [Réf. 2 p.86] et nous obtenons au second membre :

$$\begin{aligned} & [v^* u^{(3)} - u^* v^{(3)}]_0^1 - \int_0^1 (v^{*(1)} u^{(3)} - u^{*(1)} v^{(3)}) d\xi + \\ & + i \beta [v^* u^{(2)} + u^* v^{(2)}]_0^1 - i \beta \int_0^1 (v^{*(1)} u^{(2)} + u^{*(1)} v^{(2)}) d\xi + \\ & + \alpha [v^* \xi u^{(1)} - \xi v^{*(1)} u]_0^1 - \alpha \int_0^1 (v^{*(1)} \xi u^{(1)} - u^{*(1)} \xi v^{(1)}) d\xi + \\ & - \gamma [v^* u^{(2)} - u^* v^{(2)}]_0^1 - (-\gamma) \int_0^1 (v^{*(1)} u^{(1)} - u^{*(1)} v^{(1)}) d\xi \\ \langle L(u), v \rangle - \langle u, L(v) \rangle = & [v^* (u^{(3)} + i \beta u^{(2)} + \alpha \xi u^{(1)} - \gamma u^{(2)}) - u^* (v^{(3)} - i \beta v^{(2)} + \alpha \xi v^{(1)} - \gamma v^{(2)})]_0^1 \\ & - [v^{*(1)} u^{(2)} - u^{*(1)} v^{(2)}]_0^1 + \int_0^1 (v^{*(2)} u^{(2)} - u^{*(2)} v^{(2)}) d\xi \\ & - i \beta [v^{*(1)} u^{(1)} + u^{*(1)} v^{(1)}]_0^1 + i \beta \int_0^1 (v^{*(2)} u^{(1)} + u^{*(2)} v^{(1)}) d\xi \end{aligned}$$

La première partie intégrée est nulle puisque les déplacements transversaux des extrémités sont nuls et la première intégrale est identiquement nulle.

$$\langle L(u), v \rangle - \langle u, L(v) \rangle = - [v^{*(1)} u^{(2)} - u^{*(1)} v^{(2)}]_0^1 - i \beta [v^{*(1)} u^{(1)} + u^{*(1)} v^{(1)}]_0^1 + i \beta [v^{*(1)} u^{(1)}]_0^1$$

Finalement

$$\langle L(u), v \rangle - \langle u, L(v) \rangle = - [u^{(2)} v^{*(1)} + u^{*(1)} v^{(2)}]_0^1 - i \beta [u^{(1)} v^{*(1)}]_0^1$$

$$\langle L(u), v \rangle - \langle u, L(v) \rangle = 0$$

Donc le problème est auto-adjoint et admet alors des valeurs propres réelles dans les deux cas suivants, si les déplacements transversaux des extrémités sont nuls :

- Si $\beta = 0$ et s'il y a encastrement ou point d'inflexion de la déformée aux deux extrémités
- Si β n'est pas nul à condition qu'il y ait encastrement aux deux extrémités.

Montrons que dans certains cas l'opérateur L peut être défini positif

$$\int_0^1 u L(u) d\xi = \int_0^1 u [u^{*(4)} - i\beta u^{*(3)} + \alpha(\xi u^{(1)(1)}) - \gamma u^{*(2)}] d\xi$$

$$\int_0^1 u L(u) d\xi = [u(u^{*(3)} - i\beta u^{*(2)} + \alpha \xi u^{*(1)} - \gamma u^{*(1)})]_0^1 - \int_0^1 u [u^{*(3)} - i\beta u^{*(2)} + \alpha \xi u^{*(1)} - \gamma u^{*(1)}] d\xi$$

$$\int_0^1 u L(u) d\xi = [u(\quad)]_0^1 - [u^{(1)}(u^{(2)} + i\beta u^{(1)})^* + u^{(1)}(\alpha \xi - \gamma) u^*]_0^1 + \int_0^1 u^{(2)} [u^{*(2)} - i\beta u^{*(1)} + (\alpha \xi - \gamma) u] d\xi$$

$$\int_0^1 u L(u) d\xi = [u(\quad)]_0^1 - [u^{(1)}(\quad)^* + u^{(1)}(\alpha \xi - \gamma) u]_0^1 + [u^{(1)}(\alpha \xi - \gamma) u^*]_0^1 + \int_0^1 [u^{(2)} u^{*(2)} - u^{(1)} u^{*(1)} (\alpha \xi - \gamma)] d\xi - i\beta \int_0^1 u^{(2)} u^{*(1)} d\xi$$

La première partie intégrée est nulle, la deuxième intégrale est nulle si β l'est, et si γ est supérieur ou égal à α

$$\alpha \xi - \gamma < 0 \quad (0 \leq \xi < 1)$$

La deuxième intégrale est positive.

En conclusion : les valeurs propres sont certainement réelles si le coefficient β proportionnel au couple est nul pour les conditions d'extrémités que nous nous proposons d'étudier.

Si $\gamma \geq \alpha$, c'est-à-dire si la poutre est partout en traction, les valeurs propres sont positives.

III.2 - Détermination des équations permettant de calculer les valeurs propres et les fonctions propres -

■ Remarquons d'abord que si ξ , α , β , γ , sont nuls, l'équation en u se réduit à :

$$u^{(4)} + u'' = 0 \quad \text{avec } u(0) = u(1) = u^{(2)}(0) = u^{(2)}(1) = 0$$

équation classique dont les valeurs propres et les fonctions propres sont connues.

$$\begin{cases} u_n(\xi, \tau) = \sin \lambda_n \xi e^{i \sqrt{\lambda_n} \tau} \\ \text{avec } \lambda_n = n^4 \pi^4 = \omega_n^2, n \text{ entier} \end{cases}$$

■ Puisque $\sin n \pi \xi$ vérifie les conditions :

$$V_{(0)} = V_{(1)} = 0$$

Cherchons une fonction de la forme $\sin n \pi \xi v(\xi)$ satisfaisant toutes les conditions aux limites

v doit vérifier :

$$\begin{cases} i \beta v_{(0)} + 2 v_{(0)}^{(1)} = 0 \\ i \beta v_{(1)} + 2 v_{(1)}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

La fonction $v(\xi) = e^{-i \frac{\beta}{2} \xi}$ vérifie ces conditions.

Inversement, posons $V(\xi) = e^{-i \frac{\beta}{2} \xi} \psi(\xi)$

En reportant dans (1)_D nous voyons que ψ doit vérifier la nouvelle équation :

$$\begin{aligned} \psi^{(4)} - i \beta \psi^{(3)} + (\alpha \xi - \gamma) \psi^{(2)} + \left\{ \alpha - i \beta \left[(\alpha \xi - \gamma) + \frac{\beta^2}{4} \right] \right\} \psi^{(1)} + \\ + \left\{ -\frac{\beta^4}{16} - (\alpha \xi - \gamma) \frac{\beta^2}{4} - i \frac{\alpha \beta}{2} \right\} \psi = \lambda \psi \end{aligned}$$

Soit $L_v(\psi) = \lambda \psi$ avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \psi_{(0)} = \psi_{(1)} = 0 \\ \psi_{(0)}^{(2)} = \psi_{(1)}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (C)$$

ψ est complexe et peut être cherché sous forme d'une série $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + i b_n) \sin n \pi \xi$.

L'ensemble des fonctions $\{\sin n \pi \xi\}$ est en effet complet sur le segment $[0, 1]$ et chaque fonction $\sin n \pi \xi$ vérifie toutes les conditions aux limites (C) du nouveau problème, ce qui nous permet d'appliquer la méthode de Galerkin dont la convergence a été démontrée par Keldysh [Réf. 7].

La série ψ est tronquée à l'ordre p pour la p ième approximation et nous imposons les conditions d'orthogonalité :

$$\int_0^1 \sin m \pi \xi L_v(\psi) d\xi = \lambda \int_0^1 \sin m \pi \xi \psi d\xi$$

$$m = 1, 2, \dots, p.$$

Nous pourrions alors calculer les valeurs approchées des p premières valeurs propres et des $2p$ inconnues a_n et b_n définissant les modes propres.

Nous séparons les parties réelles et imaginaires de l'opérateur différentiel L_v en l'écrivant sous la forme :

$$L_v = L_0 + i L_1$$

$$\text{avec : } L_0(\psi) = \psi^{(4)} + (\alpha \xi - \gamma) \psi^{(3)} + \alpha \psi^{(2)} + \left\{ -\frac{\beta^4}{16} - (\alpha \xi - \gamma) \frac{\beta^2}{4} \right\} \psi$$

$$L_1(\psi) = -\beta \psi^{(3)} - \beta \left[(\alpha \xi - \gamma) + \frac{\beta^2}{4} \right] \psi^{(2)} - \frac{\alpha \beta}{2} \psi$$

L'opérateur L_v étant linéaire, la même condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi [a_n L_0(\sin n \pi \xi) - b_n L_1(\sin n \pi \xi)] d\xi \\ + i \sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi [a_n L_1(\sin n \pi \xi) + b_n L_0(\sin n \pi \xi)] d\xi \\ = \lambda \sum_{n=1}^p \int_0^1 (a_n + i b_n) \sin n \pi \xi \sin m \pi \xi d\xi \end{aligned}$$

avec :

$$L_0(\sin n \pi \xi) = \left\{ (n\pi)^2 + \frac{\beta^2}{4} \right\} \left\{ (n\pi)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma \right\} \sin n \pi \xi - \alpha \left[(n\pi)^2 + \frac{\beta^2}{4} \right] \xi \sin n \pi \xi + \dots + \alpha n \pi \cos n \pi \xi$$

$$\text{et } L_1(\sin n \pi \xi) = \beta \left\{ (n\pi)^3 - n\pi \left(\frac{\beta^2}{4} - \gamma \right) \right\} \cos n \pi \xi - \frac{\alpha \beta}{2} \sin n \pi \xi - \alpha \beta n \pi \xi \cos n \pi \xi$$

III.2.1 - Calcul des matrices du système dans l'approximation à l'ordre p -

Le système des p équations obtenues est vérifié si :

$$\sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi [a_n L_0(\sin n \pi \xi) - b_n L_1(\sin n \pi \xi)] d\xi = \frac{\lambda}{2} a_n$$

$$\sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi [a_n L_1(\sin n \pi \xi) + b_n L_0(\sin n \pi \xi)] d\xi = \frac{\lambda}{2} b_n$$

$$m = 1, 2, \dots, p.$$

Le calcul s'effectue compte tenu des résultats suivants :

	$m = n$	$m = n + 2q + 1$	$m = n + 2q$
$\int_0^1 \sin m \pi \xi \sin n \pi \xi d \xi$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\int_0^1 \sin m \pi \xi \cos n \pi \xi d \xi$	0	$\frac{2m}{(m^2 - n^2) \pi}$	0
$\int_0^1 \sin m \pi \xi \cdot \xi \sin n \pi \xi d \xi$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-4mn}{\pi(m^2 - n^2)(m+n)^2}$	0
$\int_0^1 \sin m \pi \xi \cdot \xi \cos n \pi \xi d \xi$	$-\frac{1}{4\pi m}$	$\frac{m}{(m^2 - n^2) \pi}$	$-\frac{m}{(m^2 - n^2) \pi}$

et le système s'écrit finalement sous forme condensée :

$$\begin{bmatrix} K & & -K_1 \\ & & \\ & & \\ K_1 & & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad E$$

Matrice K -

Matrice K_1

$$K_{m,m} = \left\{ (m\pi)^2 + \frac{\beta^2}{4} \right\} \left\{ (m\pi)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma \cdot \frac{\alpha}{2} \right\} \frac{1}{2}$$

$$K_{1mm} = 0$$

$$K_{n+2q+1,n} = \frac{2mn\alpha}{(m^2 - n^2)^2} \left(m^2 + n^2 + \frac{\beta^2}{2\pi^2} \right)$$

$$K_{1n+2q+1,n} = \frac{2\beta_{mn}}{m^2 - n^2} \left\{ (n\pi)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma \cdot \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$K_{n+2q+2,n} = 0$$

$$K_{1n+2q+2,n} = \frac{\alpha \beta_{mn}}{m^2 - n^2}$$

le premier indice étant l'indice de ligne.

La matrice K est symétrique et diagonale si $\alpha = 0$

La matrice K_1 est nulle si $\beta = 0$ et met en évidence un couplage antisymétrique entre α et β (terme $K_{1n+2q+2,n}$).

III.2.2 - Conditions théoriques de stabilité -

Soit $\lambda = \mu + i \nu$ une solution de l'équation caractéristique associée à l'équation E.

Pour cette valeur propre, l'équation (2) D possède des solutions en $e^{s\tau}$ telles que:

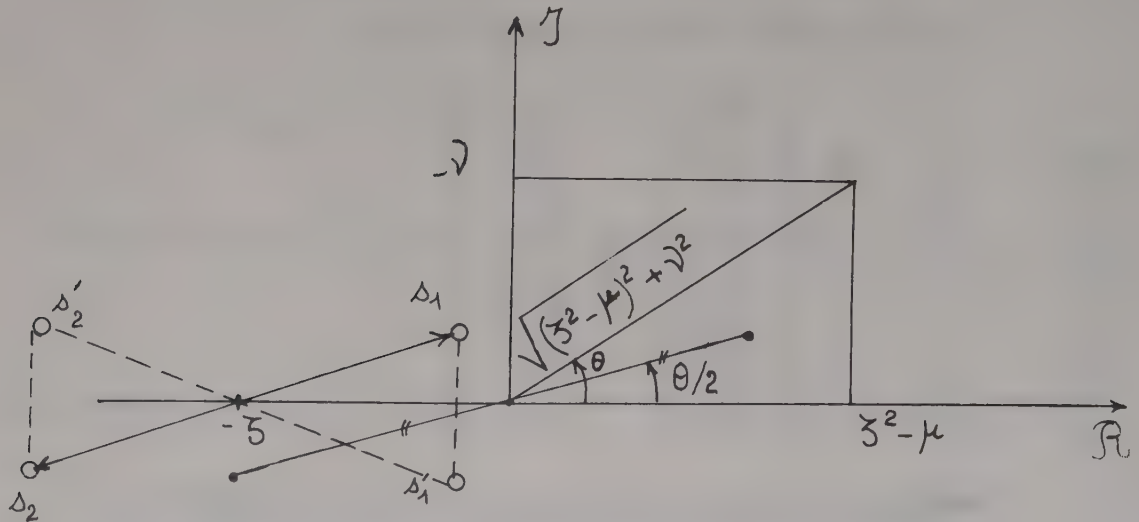
$$s^2 + 2 \zeta s + \mu + i \nu = 0$$

dont les racines sont :

$$s_{1,2} = -\zeta + [\zeta^2 - \mu - i \nu]^{\frac{1}{2}}$$

la puissance fractionnaire opérant sur un nombre complexe ayant deux déterminations.

$$[\zeta^2 - \mu - i \nu]^{\frac{1}{2}} = \{(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2\}^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i \theta + 2k \pi}{2}}$$



avec

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}}{k} = \frac{\{[(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} + \zeta^2 - \mu\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} [(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{4}}}$$

D'où :

$$\Re(s) = -\zeta + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \{[(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} + \zeta^2 - \mu\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Im(s) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \{[(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} - \mu - \zeta^2\}^{\frac{1}{2}}$$

avec $k = 0$ pour s_1 , $k = 1$ pour s_2

Les valeurs propres λ sont au nombre de $2p$, deux à deux, imaginaires conjuguées, les coefficients des matrices K et K_1 étant réels.

Les racines sont, deux à deux, imaginaires conjuguées, leurs parties imaginaires sont, en module, les pseudo-pulsations réduites des formes propres associées.

$$\omega_R = |\Im(s)| \text{ et } \omega = \Omega \omega_R$$

La condition de stabilité du mode associé s'exprime par

$$\Re(s) < 0$$

$$\text{soit : } [(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} + (\zeta^2 - \mu) < 2\zeta^2$$

$$[(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} < \zeta^2 + \mu$$

Donc $\zeta^2 + \mu$ doit être positif.

Dans cette hypothèse l'inégalité s'écrit :

$$(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2 < \zeta^4 + 2\mu\zeta^2 + \mu^2$$

$$\text{Soit } \nu^2 < 4\zeta^2\mu$$

et la condition de stabilité s'écrit :

$$\mu > \frac{\nu^2}{4\zeta^2} > 0$$

Remarques -

■ Lorsque β est nul, $\nu = 0$, et le système est stable si les valeurs propres λ sont positives.

■ Si $\mu = \frac{\nu^2}{4\zeta^2}$ $\omega_R = \sqrt{\mu}$

■ $\Im(s) = 0$ si $\nu = 0$ à la condition que $\zeta^2 - \mu$ soit positif.

III.3 - Etude de quelques cas particuliers -

Avant d'aborder le cas général, montrons que la méthode de Galerkin donne des résultats exacts dans certains cas particuliers.

• Le cas $\alpha = 0$ -

Le coefficient α est nul lorsque $\rho = \rho_m$ ou lorsque l'influence de la pesanteur est négligée.

La valeur $\lambda = 0$ correspond à un cas limite de stabilité. L'équation (2)_D s'écrit :

$$W'' + 2\zeta W' = 0$$

$$\text{D'où } \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2\zeta \end{cases}$$

$$\text{L'équation (1)_D s'écrit } V^{(4)} + i\beta V^{(3)} - \gamma V^{(2)} = 0$$

soit après deux intégrations

$$V^{(2)} + i\beta V^{(1)} - \gamma V = C\xi + D$$

avec $C = 0$, $D = 0$, compte tenu des conditions d'extrémités.

On peut en chercher des solutions de la forme $e^{\rho\xi}$, l'équation caractéristique associée étant

$$\rho^2 + i\beta\rho - \gamma = 0$$

D'où

$$V(\xi) = e^{-\frac{i\beta}{2}\xi} \left\{ A_1 \operatorname{sh}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \xi + B_1 \operatorname{ch}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \xi \right\}$$

si $\gamma - \frac{\beta^2}{4}$ est positif,

$$\text{et } V(\xi) = e^{-\frac{i\beta}{2}\xi} \left\{ A_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \xi + B_2 \cos\left(\frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \xi \right\}$$

si $\gamma - \frac{\beta^2}{4}$ est négatif.

Compte tenu des conditions $V_{(0)} = V_{(1)} = 0$, seul le second cas correspond à une solution

$$V = e^{-\frac{i\beta}{2}\xi} A_2 \sin\left(\left(\frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right)$$

avec $\frac{\beta^2}{4} - \gamma = n^2 \pi^2$ (n entier)

$$U_n(\xi, \tau) = e^{-\frac{i\beta}{2}\xi} \sin n\pi\xi [e^{-2\xi\tau} + K]$$

Les nombres n, γ, β vérifiant la relation :

$$(n\pi)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

définissent les conditions de flambement d'ordre n du système linéarisé.

▲ Lorsque β est nul, l'instabilité est déterminée par la relation

$$\gamma = -n^2 \pi^2$$

$$\text{Soit } F_0 = -n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

ce qui correspond à une force de compression axiale constante, α étant nul.

La poutre est instable dès qu'elle est soumise à une force de compression supérieure à $\pi^2 \frac{EI}{l^2}$, résultat bien connu dû à Euler.

▲ Lorsque β n'est pas nul, le résultat trouvé est celui de Greenhill [Réf.6] aux notations près :

$$n^2 \pi^2 + \frac{F_0 \ell^2}{EI} - \left(\frac{\Gamma \ell}{2EI} \right)^2 = 0$$

Le système linéarisé est à la limite de stabilité, si F_0 est nul, si $\Gamma = 2 \sqrt{\frac{EI}{\ell}}$.

Ces résultats se retrouvent immédiatement dans nos calculs car si α est nul, il apparaît, lorsqu'on fait $\lambda = 0$, un facteur commun dans chaque colonne du déterminant caractéristique associé à l'équation E. Ce déterminant s'écrit

$$\prod_{n=1}^{n=p} \left[(n\pi)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} \right] P(\gamma, \beta) = 0$$

● Le cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

La poutre est soumise à une force de traction F_0 et le calcul direct est relativement simple :

L'équation (1)_D s'écrit :

$$V^{(4)} - \gamma V^{(2)} - \lambda V = 0$$

Elle possède des solutions de la forme $e^{\rho \xi}$ telles que

$$\rho^4 - \gamma \rho^2 - \lambda = 0$$

Soient : $\rho_1^2 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\lambda}}{2}$, $\rho_2^2 = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\lambda}}{2} = i(\rho_3)^2$

et $V_n(\xi)$ peut s'écrire :

$$V_n(\xi) = A \operatorname{ch} \rho_1 \xi + B \operatorname{sh} \rho_1 \xi + C \cos \rho_3 \xi + D \sin \rho_3 \xi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \xi = 0 \quad V_{(0)} = 0 \quad \text{donc } A = -C \\ V_{(0)}^{(2)} = 0 \quad \text{donc } A \rho_1^2 - C \rho_3^2 = 0 \end{array} \right\} \text{donc } A = C = 0 \text{ en général}$$

$$\text{Pour } \xi = 1 \quad V_{(1)} = 0 \quad \text{donc } B \operatorname{sh} \rho_1 + D \sin \rho_3 = 0$$

$$V_{(1)}^{(2)} = 0 \quad \text{donc } B \rho_1 \operatorname{sh} \rho_1 - D \rho_3 \sin \rho_3 = 0$$

La solution des deux dernières équations n'est pas triviale si $\operatorname{sh} \rho_1 \sin \rho_3 (\rho_3 + \rho_1) \neq 0$

$\rho_1 = 0$ implique $\lambda = 0$ et donne la solution banale $V(\xi) = 0$

$\rho_3 = n\pi$ implique $B = 0$ et

$$2n^2 \pi^2 = \sqrt{\gamma^2 + 4\lambda}$$

$$\text{Soit } \lambda = (n \pi)^2 [(n \pi)^2 + \gamma]$$

$$U_n = A_n \sin n \pi \xi e^{i n \pi \sqrt{(n \pi)^2 + \gamma} \tau}$$

résultats qu'on obtiendrait avec l'équation E.

III.4 - Cas d'une poutre non soumise à un couple de torsion -

III.4.1 - Etude des valeurs propres -

Puisque β est nul, les valeurs propres sont toutes réelles.

Les calculs ont été effectués à l'IBM 1130 de l'E.N.S.M. en double précision pour différentes valeurs du rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ (rapport compris entre 0 et 1 paragr. II.3) :

$$\gamma = \alpha \quad \gamma = \frac{3}{4} \alpha \quad \gamma = \frac{\alpha}{2} \quad \gamma = 0$$

Nous avons calculé $(\frac{\lambda}{\pi})^{\frac{1}{4}}$, quantité qui, pour $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, est réelle et égale à un entier n (1, 2, 3,).

Les calculs ont été effectués à l'ordre 2, 3, 4, 5 ($p = 2, 3, 4, 5$ respectivement) afin de pouvoir évaluer la précision et la convergence de la méthode.

Les résultats sont portés sous forme de graphiques en coordonnées semi-logarithmiques dans les pages qui suivent et nous allons en faire un rapide commentaire.

Poutre en traction $\gamma = \alpha$ (figure 1) -

Il apparaît que la pesanteur a un effet tendant à augmenter la raideur du système. Les valeurs propres augmentent quand α augmente, les écarts mutuels entre les valeurs de $(\frac{\lambda}{\pi})^{\frac{1}{4}}$ restant sensiblement constants. Les valeurs propres sont toujours positives comme le prévoyait la théorie (paragraphe III.1).

Si α est grand, le terme $K_{n,n}$ de la matrice K est de l'ordre de $\frac{n^2 \pi^2}{2} \frac{\alpha}{2}$; en négligeant les termes de couplage, on peut prendre comme valeur approchée de λ :

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{2} \alpha$$

$$\text{Soit } \omega^2 = \Omega^2 \omega_R^2 = \frac{n^2 \pi^2}{2} \left(\frac{\rho - \rho_m}{\rho} \right) \frac{g}{p}$$

$$\alpha \text{ grand, } \zeta = 0$$

$$\text{Soit } \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

cette formule approchée se révèle être une excellente approximation pour la première valeur propre

dès que α est supérieur à 100 et semble bien représenter les autres valeurs propres dès que α est suffisamment élevé (figure 1) .

Poutre en partie en traction, en partie en compression $0 < \gamma < \alpha$ - (figures 2 et 3) -

Dès que γ est inférieur à α , des valeurs propres nulles puis négatives commencent à apparaître d'autant plus rapidement que le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ diminue, la poutre ayant une longueur de plus en plus grande en compression.

Poutre en compression $\gamma = 0$ (figure 4) -

Les valeurs propres s'annulent les unes après les autres à mesure que α dépasse des valeurs critiques données sensiblement si n est petit par la formule correspondant à l'annulation du terme $K_{n,n}$:

$$\alpha = 2 n^2 \pi^2$$

Critique

■ Ces différents résultats sont plus significatifs dans un diagramme $\{\gamma, \alpha\}$ où nous avons fait calculer les courbes le long desquelles la relation $\lambda = 0$ est vérifiée (figure 5) .

- Pour α inférieur à $2 \pi^2$ environ, toutes les valeurs propres sont positives. Le système est stable, chaque forme propre est réelle et amortie (stabilité asymptotique) .

- Pour α supérieur à $2 \pi^2$ environ, la courbe $\lambda_1 = 0$ partage le plan en deux régions:

Dans la partie supérieure, le système est stable,

Dans la zone située sous la courbe $\lambda_1 = 0$, le système est instable (instabilité du type divergence) . Il existe au moins une valeur propre négative si α est supérieur à $2 \pi^2$, deux si α est supérieur à $8 \pi^2$, etc

Il est intéressant de comparer ces valeurs critiques $2 n^2 \pi^2$, approchées, du paramètre α , à celles trouvées par une méthode totalement différente par Tseng Huang et Dareing (réf. 11 p. 175, table 1, case 11) et égales à :

$$18,569 - 86,431 - 196,29 - \dots$$

Ces résultats sont en accord avec les nôtres à la précision des calculs près.

Nous remarquons que l'étude du comportement asymptotique des solutions pour α grand doit être singulièrement compliquée par l'apparition des modes instables correspondant aux α critiques. En effet, pour α grand, fixé, le système possède un nombre dépendant de α de modes instables. Ces difficultés n'apparaissent heureusement pas avec la méthode de Galerkin.

$\lambda \left(\frac{\lambda}{\pi^4} \right)^{1/4}$

VALEURS PROPRES

$\beta = 0$

$\gamma = \alpha$ (poutre en traction)

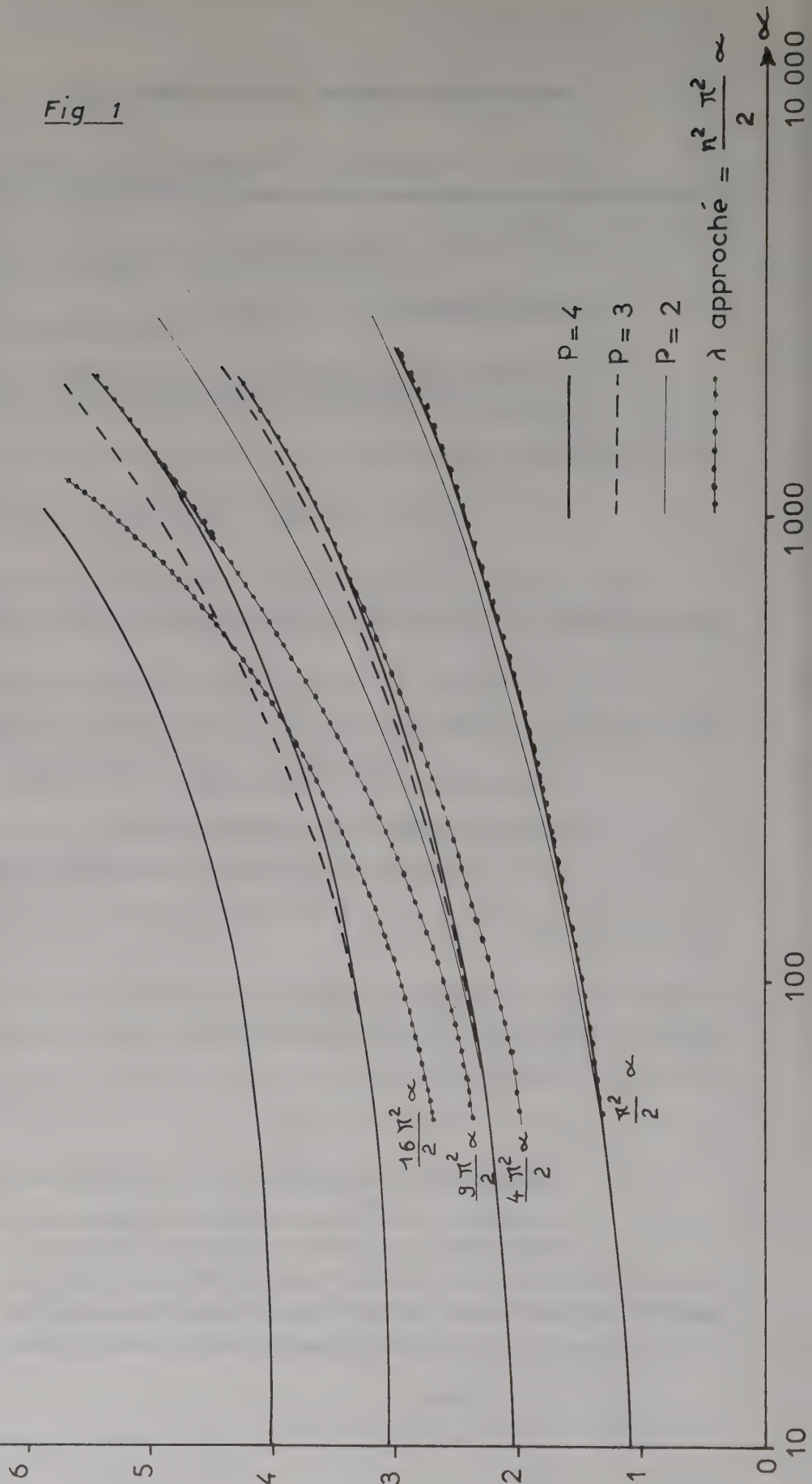


Fig 1

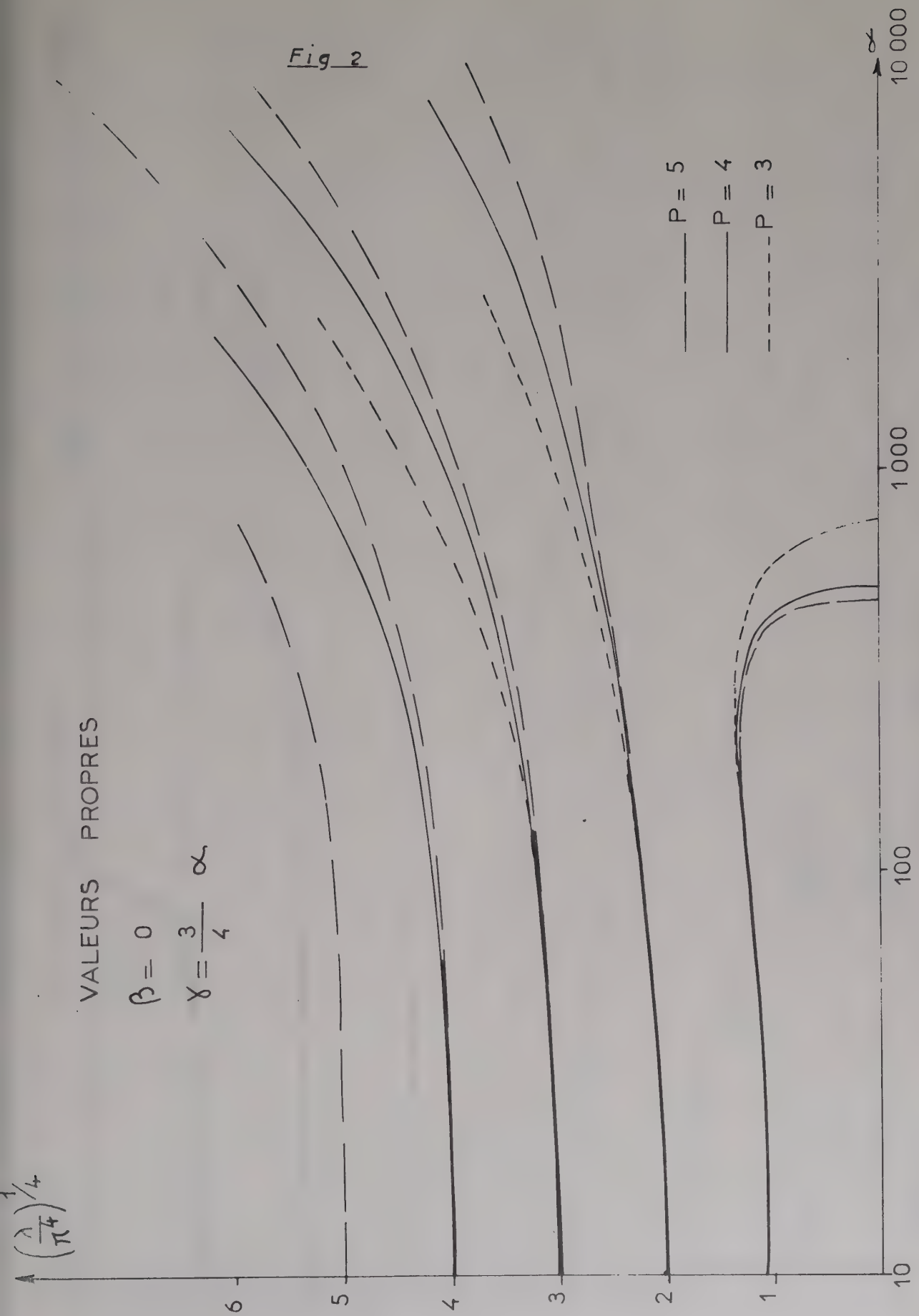


Fig 5

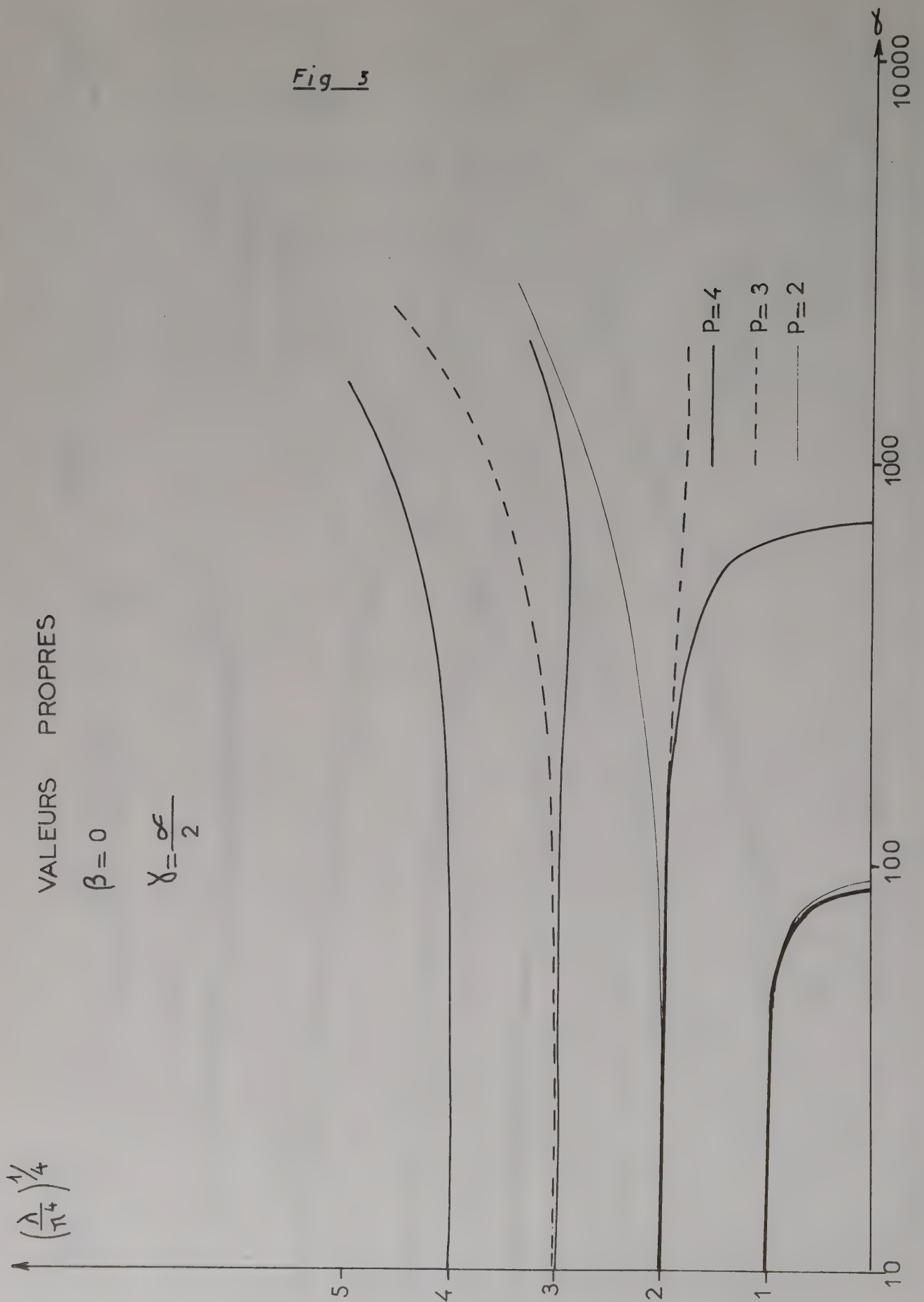


Fig 4

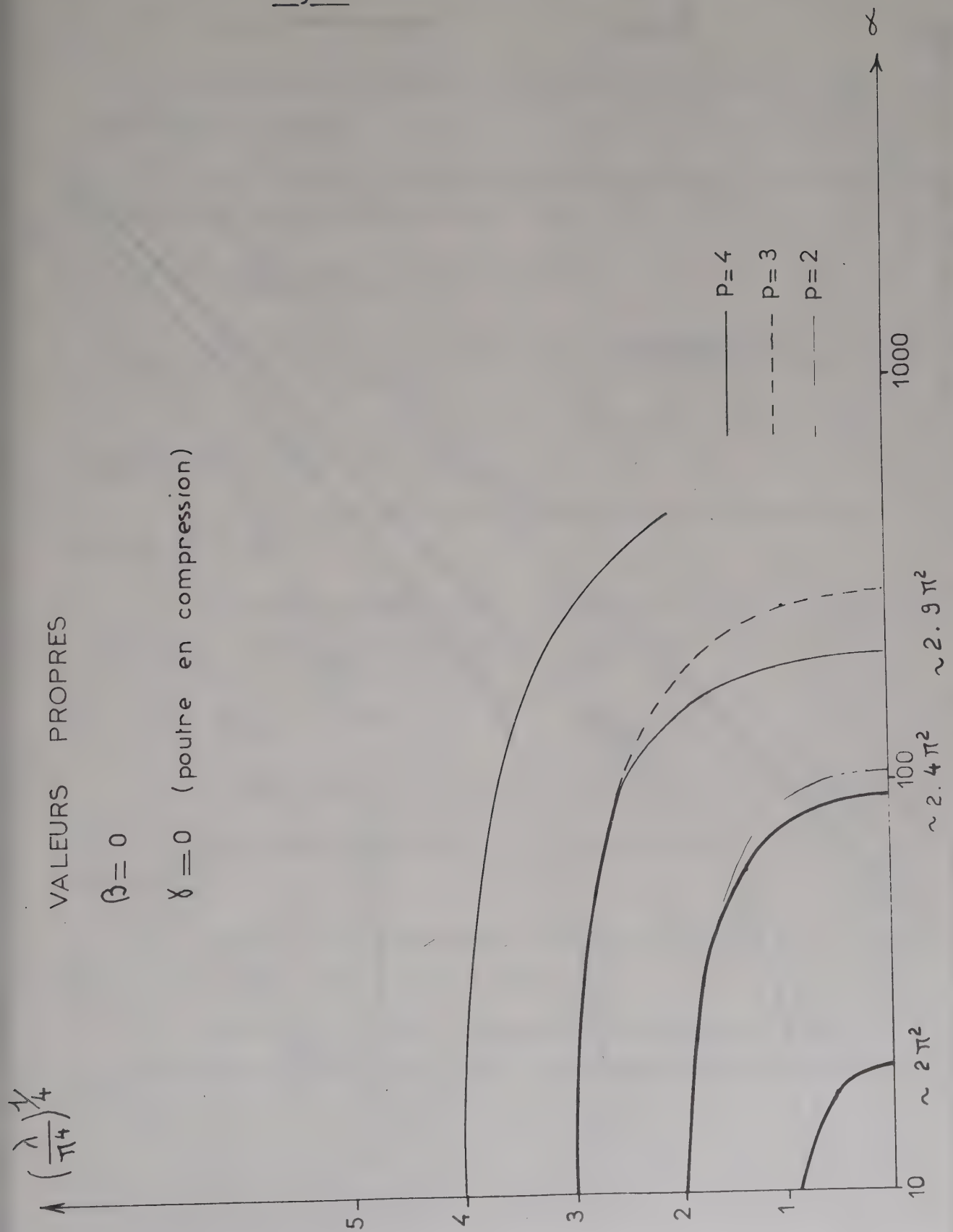
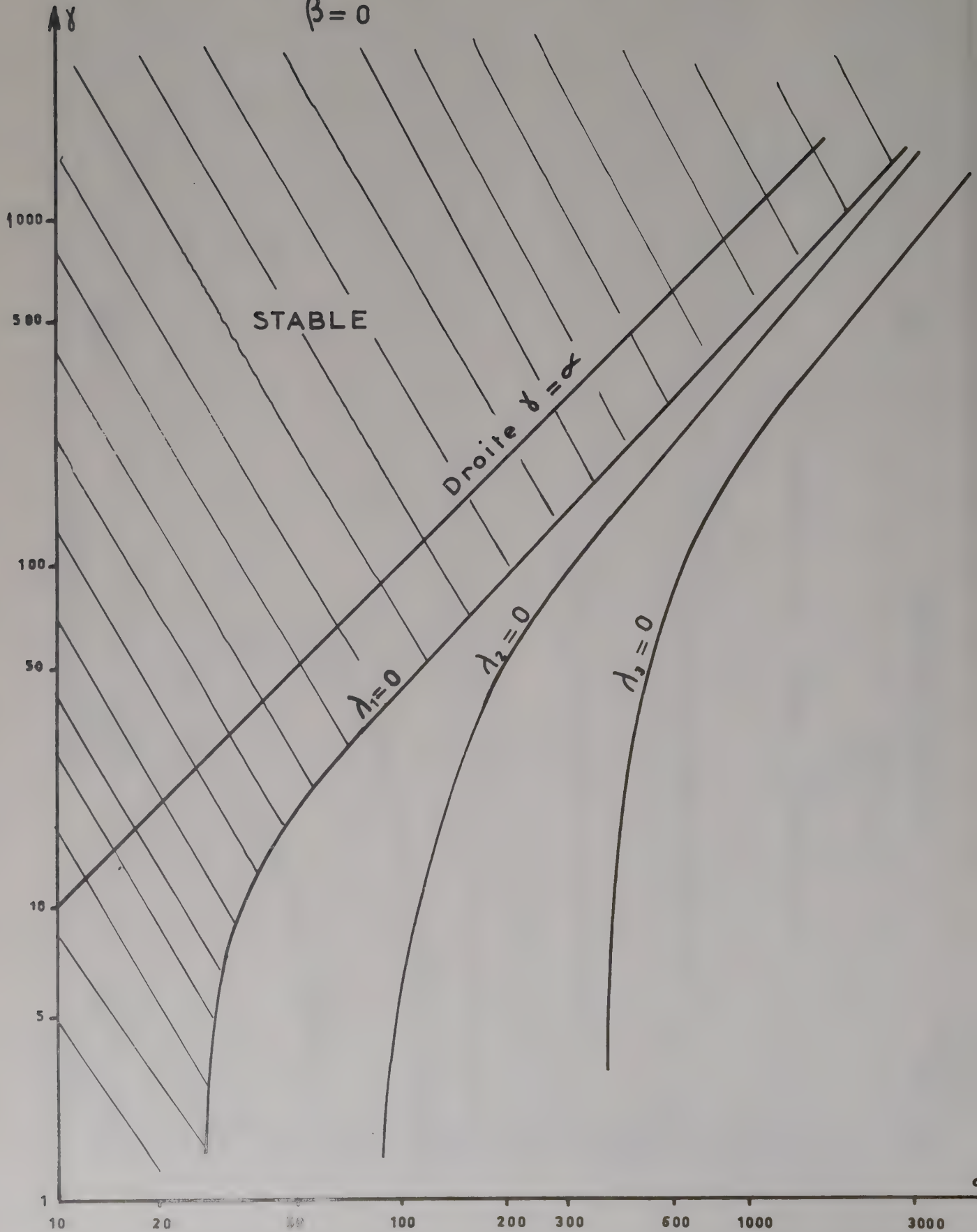


Fig 5

DIAGRAMME DE STABILITE

$\beta = 0$



Résultats relatifs à la précision -

Il est apparu qu'il est suffisant de prendre $p \geq 3$ pour avoir une précision très acceptable et que la précision diminuait lorsque le coefficient α croissait.

III.4.2 - Etude des fonctions propres -

Pour α petit, les valeurs propres $(\frac{\lambda}{\pi})^{\frac{1}{4}}$ sont très voisines d'entiers et les formes propres voisines de sinusoides.

Nous avons tracé les quatre premières formes propres, quand elles existent, pour α petit et α relativement grand, pour différentes valeurs du rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ (figures 6 et 7).

III.5 - Cas d'une poutre soumise à un couple de torsion -

Nous nous bouterons à étudier l'évolution des valeurs propres λ en fonction des coefficients α et β ; les fonctions propres étant complexes, nécessiteraient une représentation spatiale.

Les calculs ont été faits avec des matrices d'ordres 2, 4 et 6 ($p = 1, 2, 3$ respectivement) afin d'évaluer la convergence.

Les courbes sont tracées en coordonnées bilogarithmiques dans le plan complexe (figures 9, 10, 11, 12).

Afin de ne pas surcharger les réseaux, nous avons porté seulement les résultats à l'ordre 6 ($p = 3$) et, en pointillés, quelques résultats à l'ordre 4 ($p = 2$). Comme on peut le voir sur chaque graphique, l'approximation à l'ordre 6 est très bonne.

III.5.1 - Stabilité -

La stabilité dépend de la position de μ , la partie réelle de λ , par rapport à $\frac{\gamma}{4\zeta^2}$.

Nous avons porté en abscisses $u = (\frac{\mu}{\pi})^{\frac{1}{4}}$ et en ordonnées $v = (\frac{\gamma}{4\pi})^{\frac{1}{4}}$ en échelles logarithmiques.

Pour la valeur de ζ correspondant à un cas limite de stabilité ($\frac{v^2}{4\zeta} = \mu$) nous avons la relation $4 \text{Log } v - \text{Log } \zeta = 2 \text{Log } u - \text{Log } \frac{\pi^2}{2}$.

Pour $u = \frac{\pi}{\sqrt{20}}$, $\zeta = 10 v^4$ et nous pouvons tracer un abaque des courbes « ζ constant » représentées par des droites, l'axe $u = \frac{\pi}{\sqrt{20}} = 0,703$ étant gradué en valeurs de ζ .

FORMES PROPRES

$\alpha = 10$, $\alpha = 80$

$$\gamma = \alpha$$

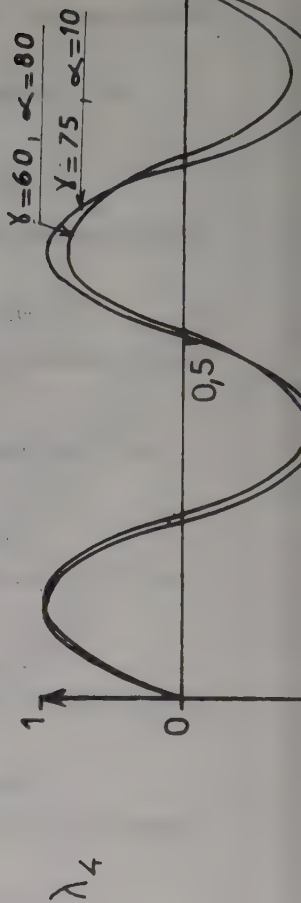
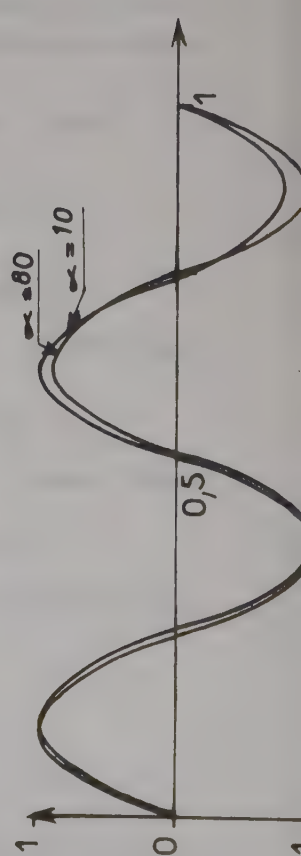
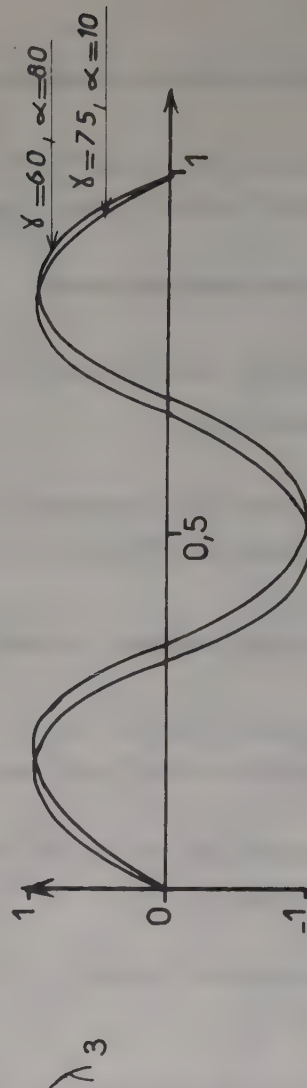
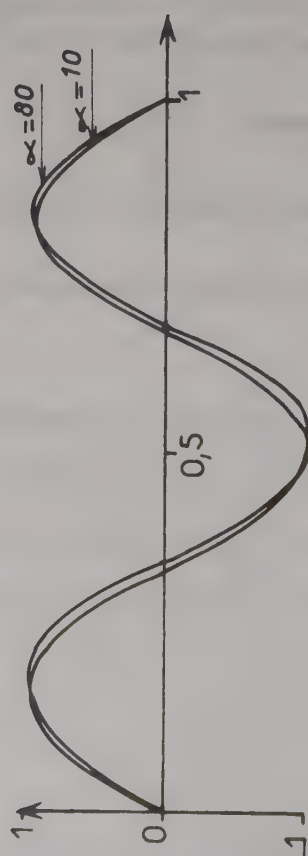
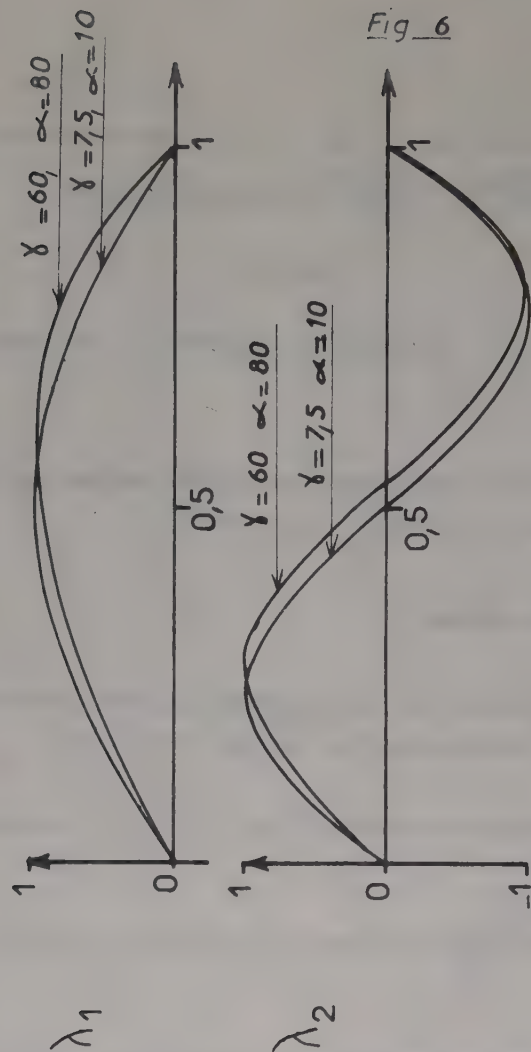
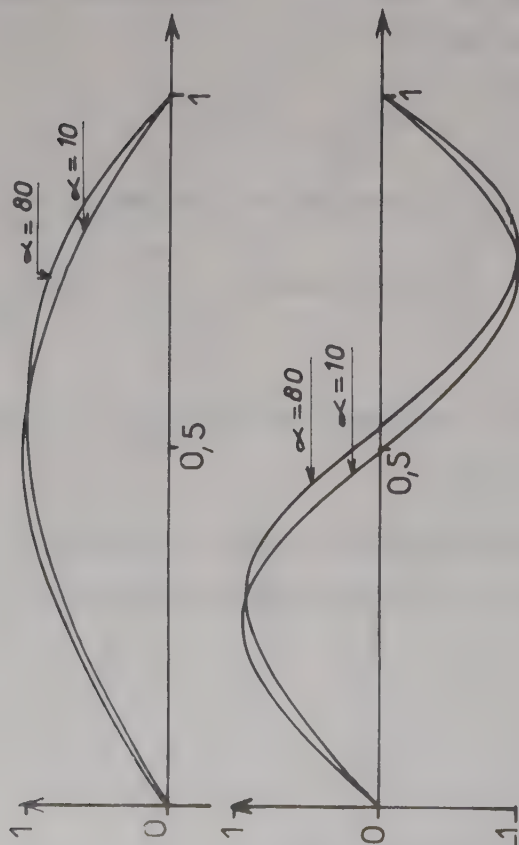
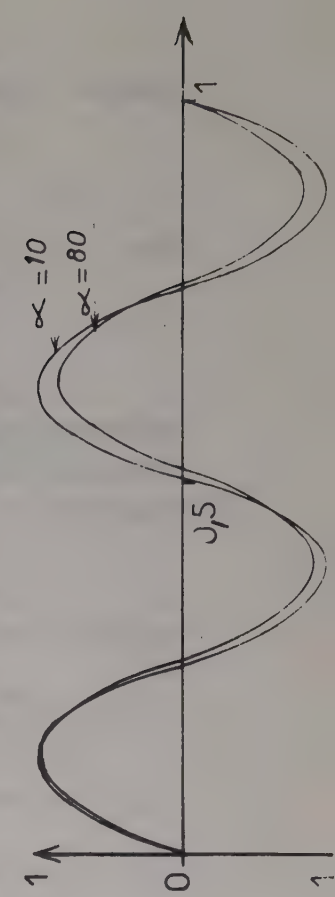
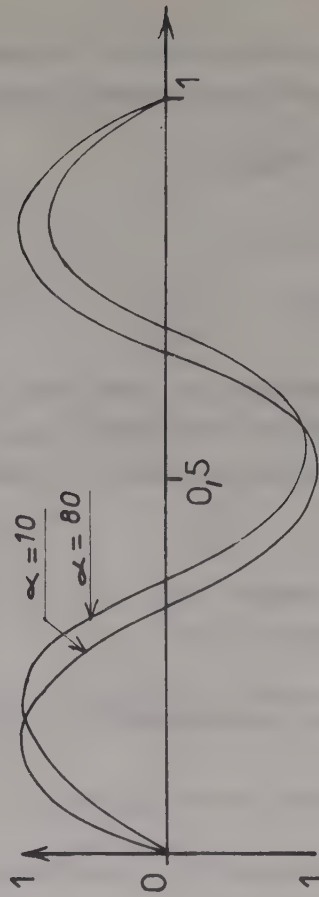
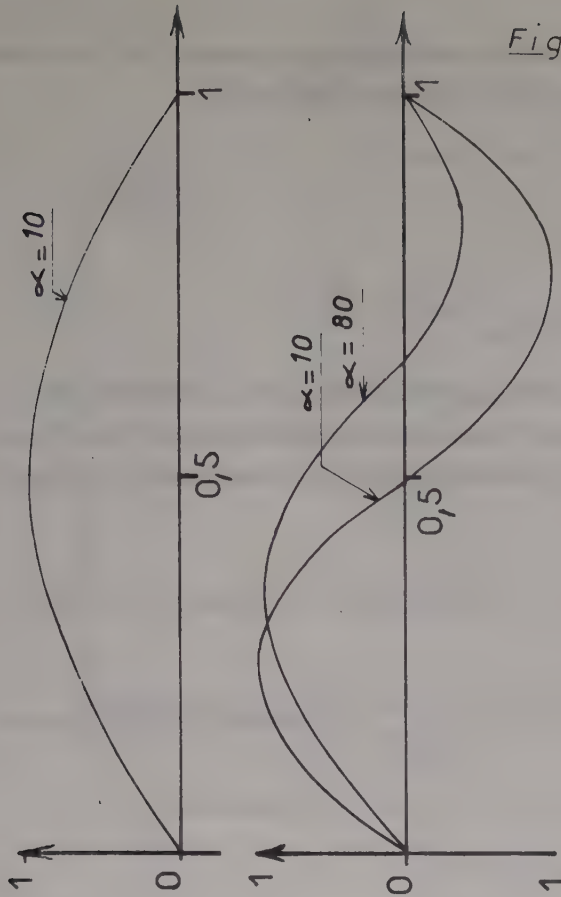


Fig 6

Fig 7

$$\gamma = 0$$



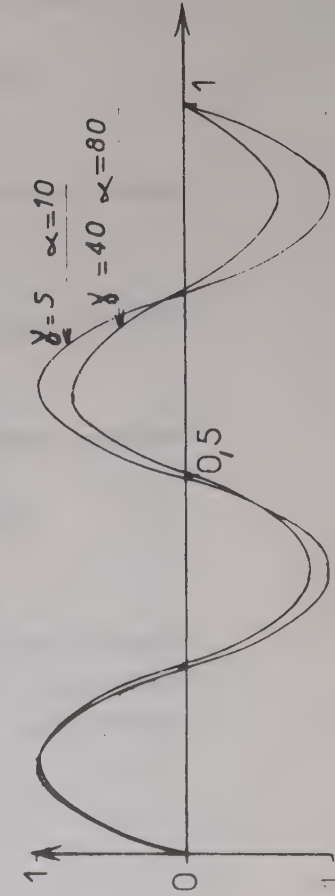
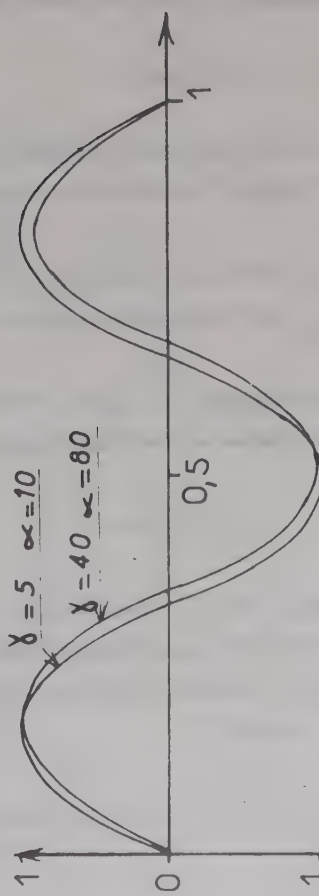
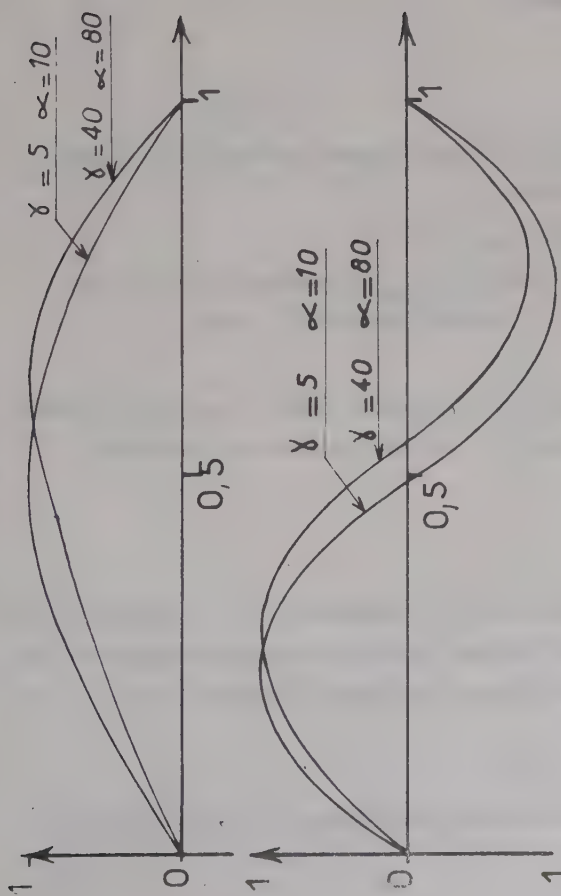
λ_1

λ_2

λ_3

λ_4

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$



$$\alpha = 10, \alpha = 80$$

La poutre est stable si les points correspondant aux valeurs propres sont situés sous la droite ζ relative à l'amortissement du système, et à la limite de stabilité si

$$\zeta^2 = \frac{\nu^2}{4\mu}$$

alors $\Re(\lambda) = 0$

$$\Im(\lambda) = \pm \sqrt{\mu}$$

$$\omega_R = \sqrt{\mu}$$

Il est apparu que, comme dans le cas de couple de torsion nul, la stabilité dépend seulement de la première valeur propre. Les parties imaginaires des valeurs propres étaient sensiblement les mêmes pour une valeur de α fixée, les réseaux présentant l'allure suivante : figures 8 A et 8 B.

Les points $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ sont sensiblement alignés sur une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Dans le cas de figure 8 A, pour $\{\beta = \beta_r, \zeta = \zeta_n\}$ le système est toujours stable.

Dans le cas de figure 8 B, pour $\{\beta = \beta_2, \zeta = \zeta_1\}$, le système est :

- stable pour $\alpha = \alpha_3$ (point figuratif $R(\alpha_3)$)
- instable pour $\alpha = \alpha_2$ (point figuratif $Q_1(\alpha_2)$)

Ainsi nous n'avons porté en général sur les graphiques, que la première valeur propre puisque c'est elle qui détermine la stabilité.

III.5.2 - Résultats relatifs aux valeurs propres -

Cas $\gamma = \alpha$ (figure 9) -

Les parties réelles et imaginaires de λ sont croissantes en fonction de α et pour des amortissements faibles, l'instabilité peut apparaître.

On peut définir un amortissement critique ζ_{critique} correspondant au cas où la droite $\zeta = \zeta_{\text{critique}}$ est tangente à la courbe $\lambda(\alpha)$ à couple de torsion β fixé.

L'augmentation de β a pour effet de diminuer la partie réelle, d'augmenter la partie imaginaire, donc, de diminuer l'amortissement critique.

Cas $\gamma = \frac{3}{4} \alpha$ (figure 10) -

Si pour α petit, l'évolution de λ est la même, rapidement (pour α supérieur à 200), les parties réelles diminuent pour devenir négatives. On peut toujours trouver une valeur de l'amortissement pour laquelle l'instabilité peut apparaître puisque les droites à amortissement constant coupent toujours les courbes λ .

Le couple β a une influence plus sensible que précédemment sur les valeurs de λ .

Fig 8A

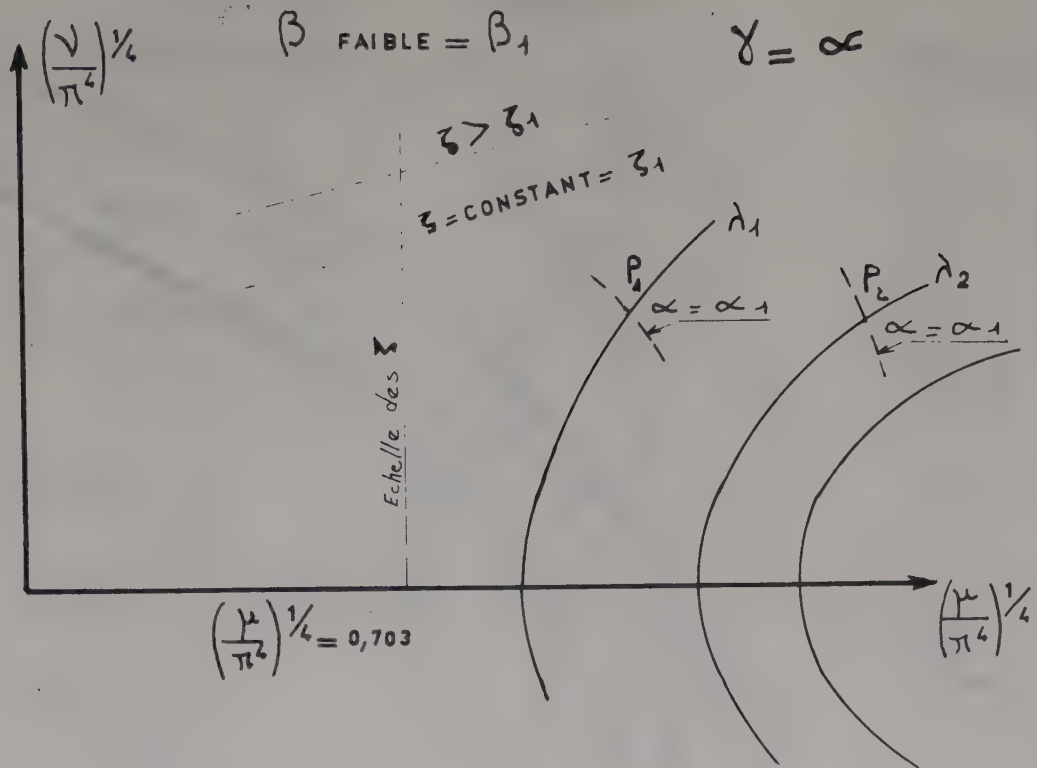


Fig 8B

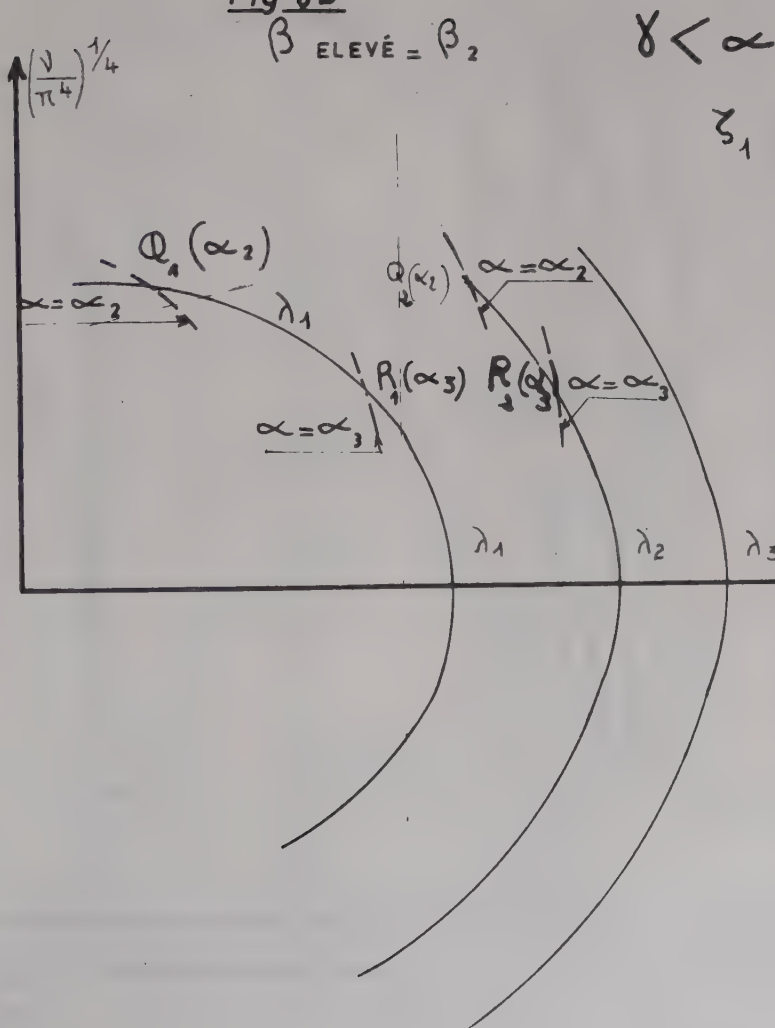
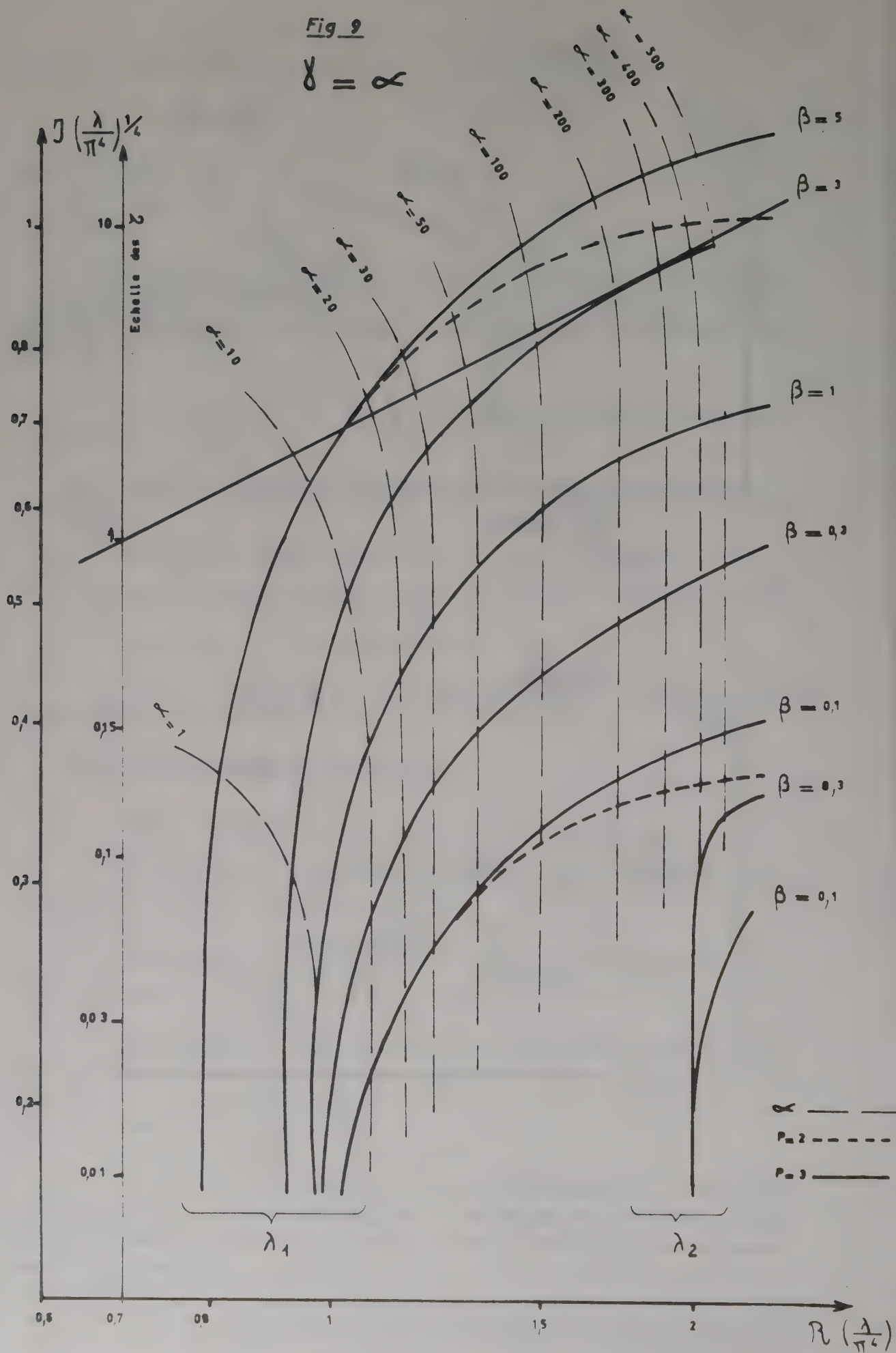


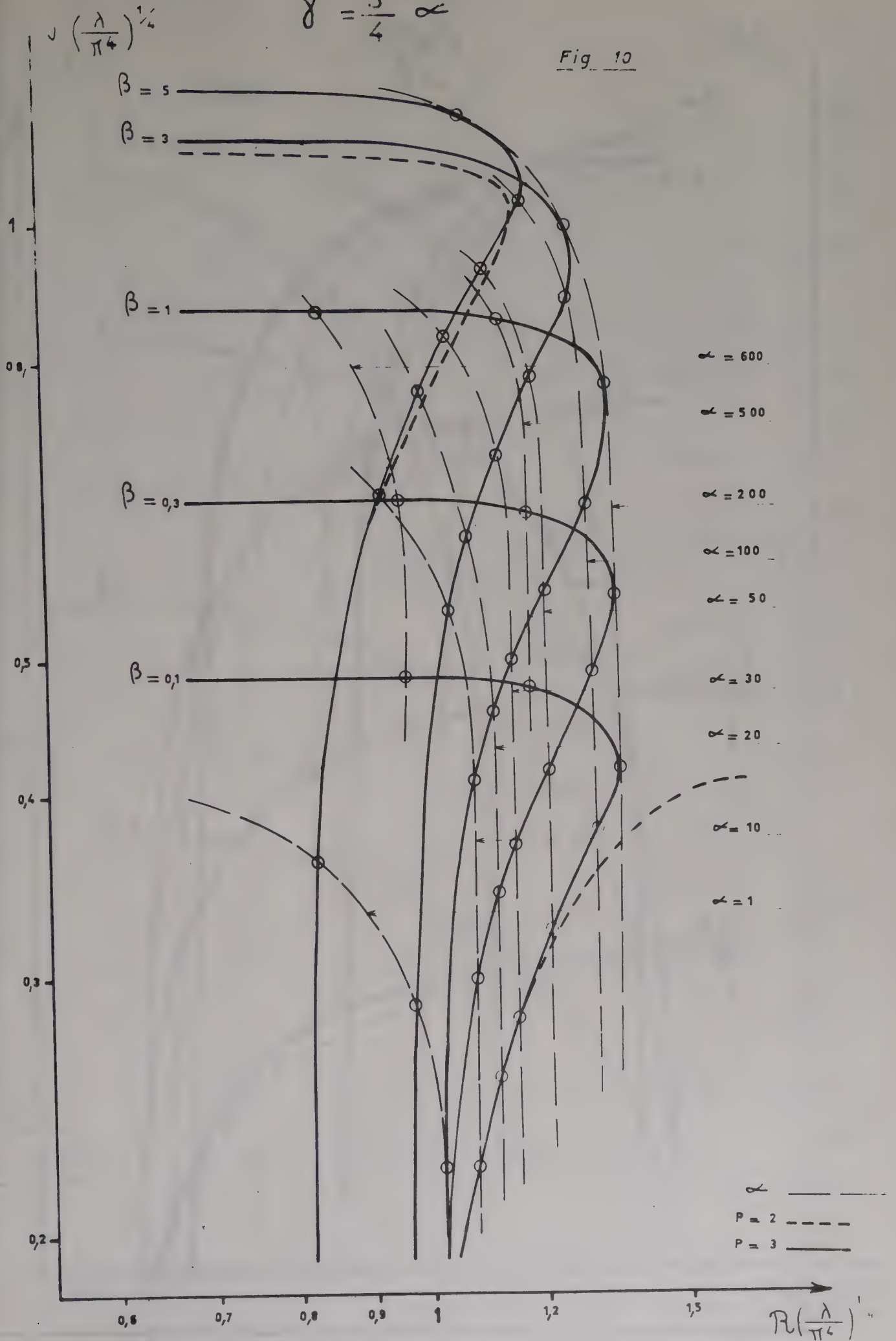
Fig 9

$$\gamma = \infty$$



$$\gamma = \frac{3}{4} \infty$$

Fig 10



$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

Fig 11

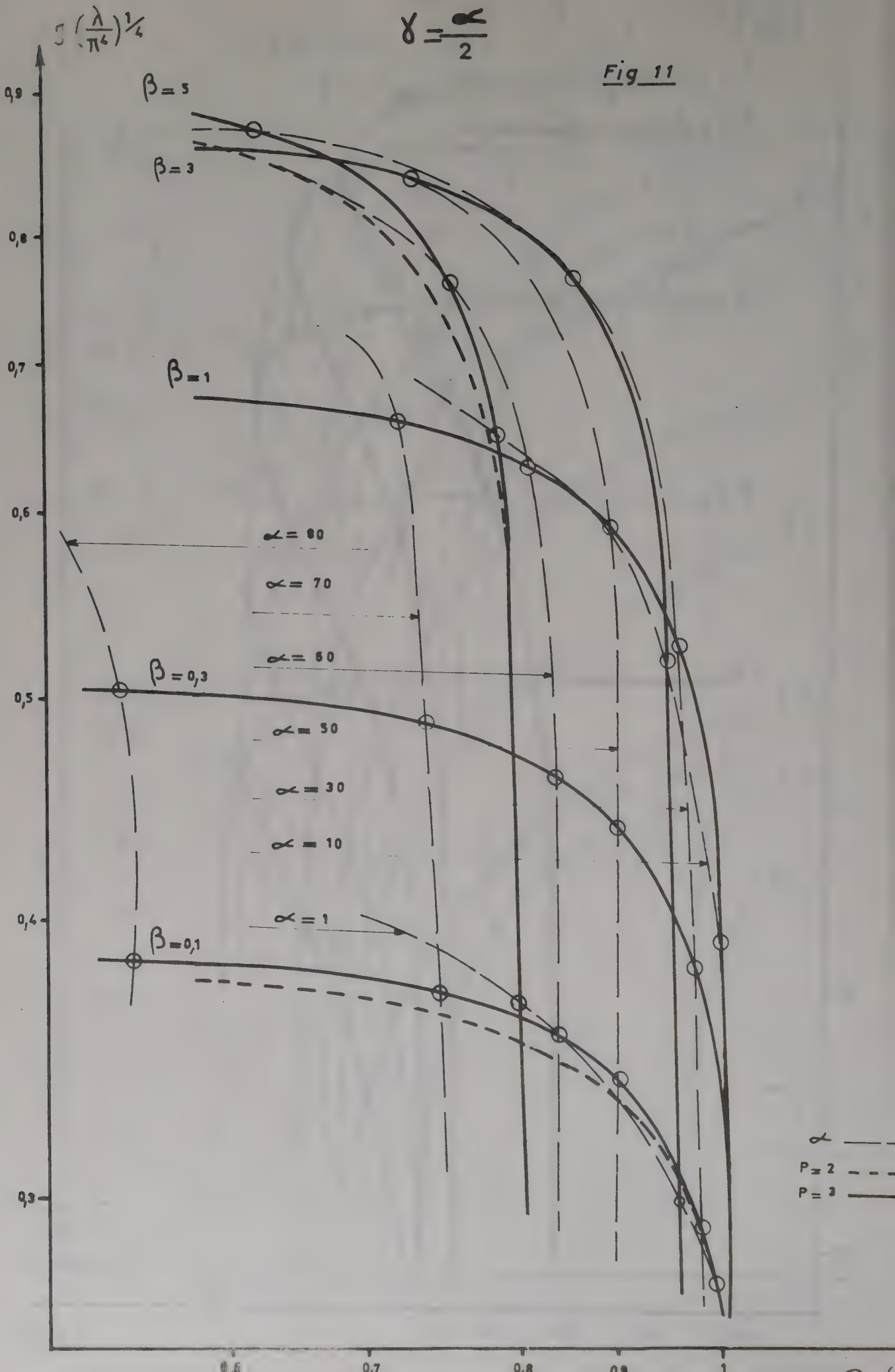
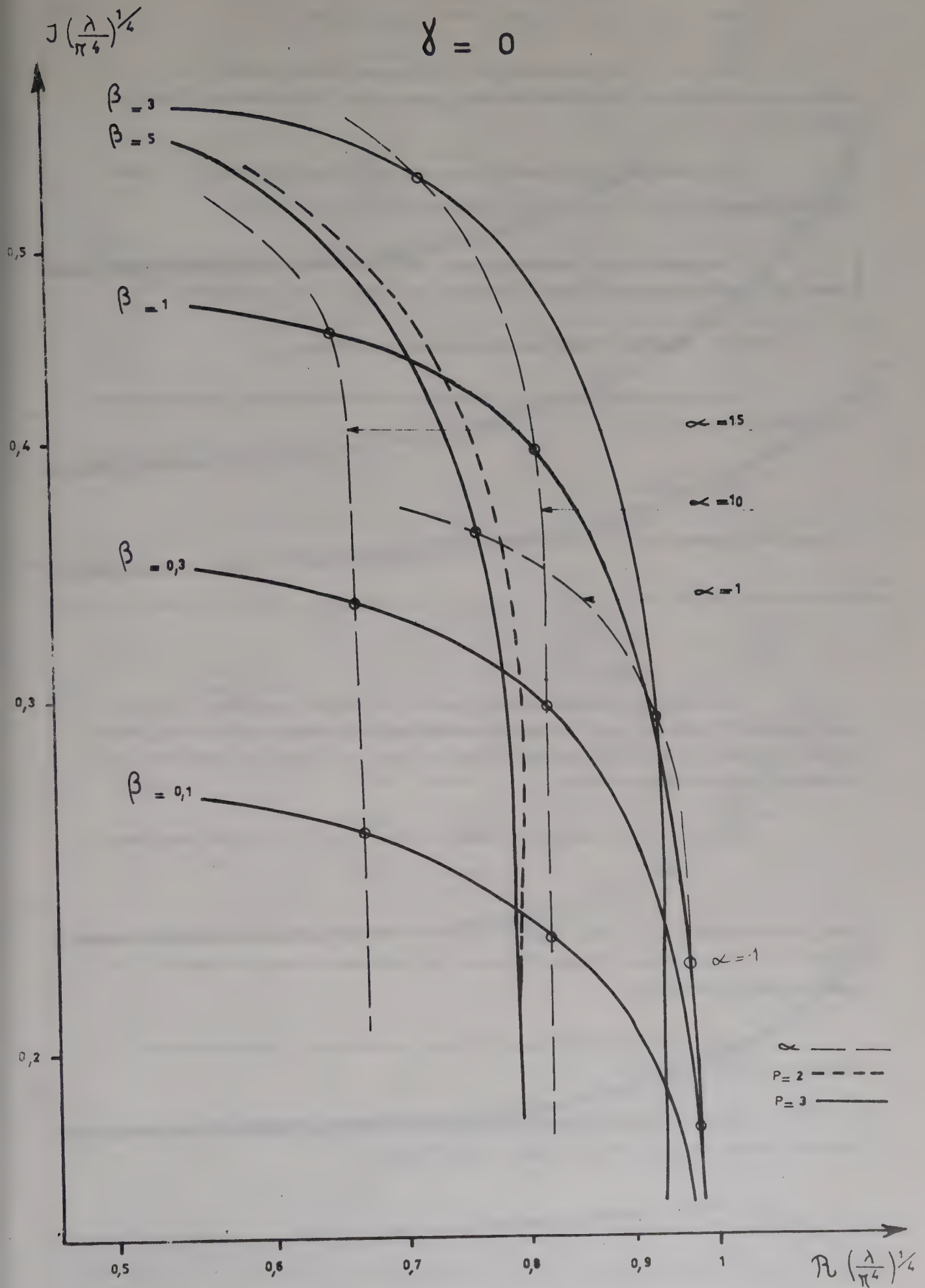


Fig 12

$$\gamma = 0$$



Cas $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = 0$ (figures 11 et 12, pages 44 et 45).

Pour $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, les parties réelles de λ décroissent toujours lorsque α croît, ce qui diminue encore la stabilité. On peut faire les mêmes remarques sur l'amortissement que dans le cas $\gamma = \frac{3}{4} \alpha$.

L'influence de β se fait sentir même pour α petit, la partie réelle de $(\frac{\lambda}{\pi})^{\frac{1}{4}}$ étant toujours inférieure à l'unité. Ces phénomènes sont encore plus nets si $\gamma = 0$.

Il est possible que l'instabilité mise en évidence ici et provenant du couple proportionnel à β soit due en partie à la présence de termes gyroscopiques dans la matrice K_1 .

III.5.3 - Résultats relatifs aux pseudo-pulsations réduites ω_R -

Les pseudo-pulsations réduites de résonance sont les modules des parties imaginaires des racines de l'équation (2)_D.

$$\omega_R = |H(s)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(\zeta^2 - \mu)^2 + \nu^2]^{\frac{1}{2}} + \mu - \zeta^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

ces quantités dépendent de ζ coefficient d'amortissement.

Pour $\zeta = 0$

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\mu^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}} + \mu \}^{\frac{1}{2}}$$

Nous pouvons considérer que ces pulsations sont celles d'un système fictif sans amortissement. En admettant qu'au voisinage d'une résonance, le système se comporte sensiblement comme un système à un degré de liberté, nous déterminons ainsi les « résonances de phase » faciles à mettre en évidence expérimentalement.

Avec cette formule approchée, indépendante de ζ , pour μ égal à zéro, nous trouvons:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\nu}{2}}$$

cette valeur correspond, par la formule exacte, à $\mu = \zeta^2$, la formule est donc une excellente approximation si ζ est petit, disons inférieur à 0,1 et se justifie d'autant plus que pratiquement $\mu = 0$ est déterminé par interpolation.

Nous avons donc calculé les pulsations ω_R par la formule encadrée ci-dessus (figures 13, 14, 15, 16, 16 bis).

Lorsque μ s'annule, nous dirons, par définition, qu'il y a flambement. Le flambement se produit, comme lorsque β est nul dès que γ est inférieur à α .

Fig 13

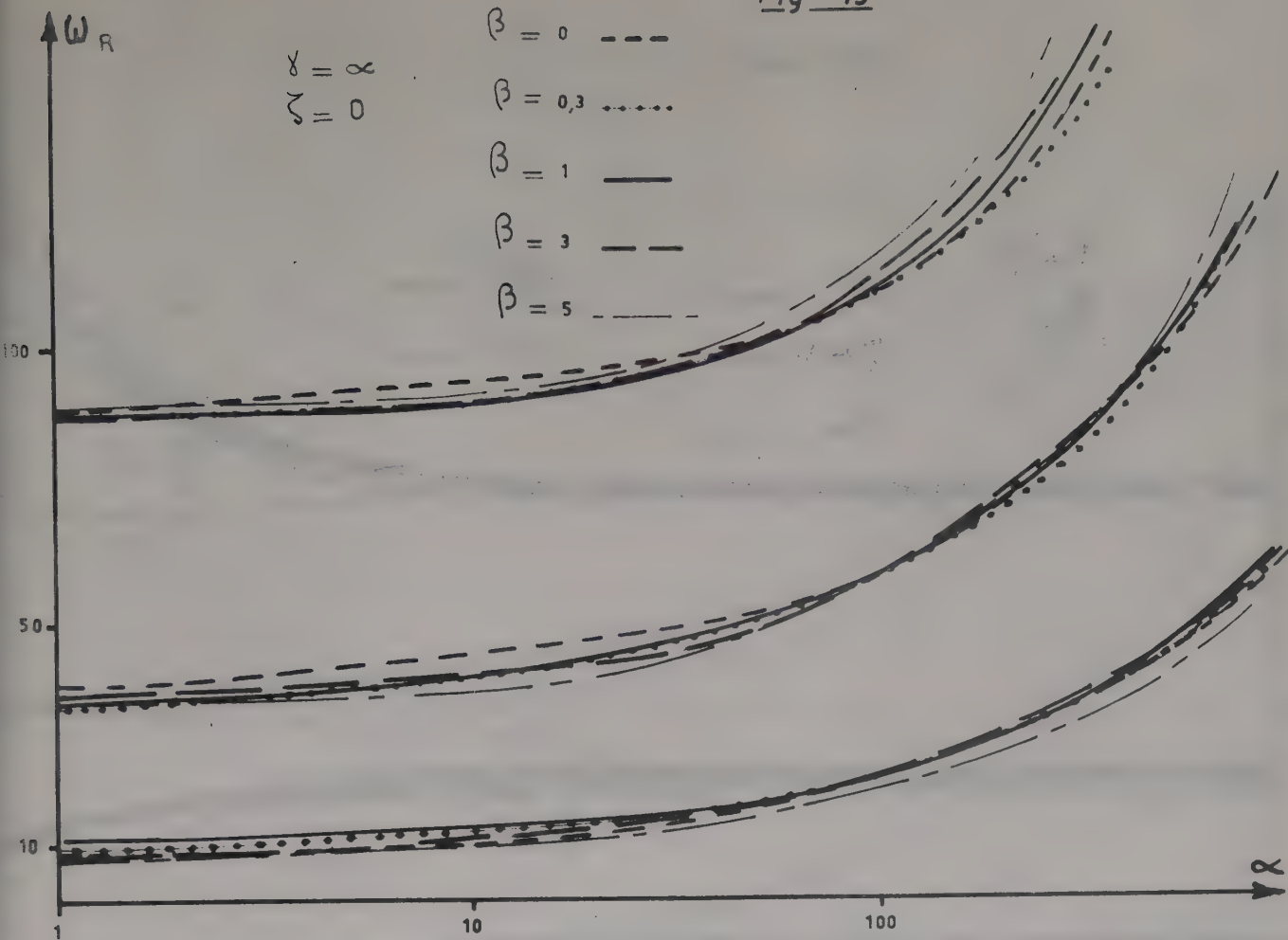


Fig 14

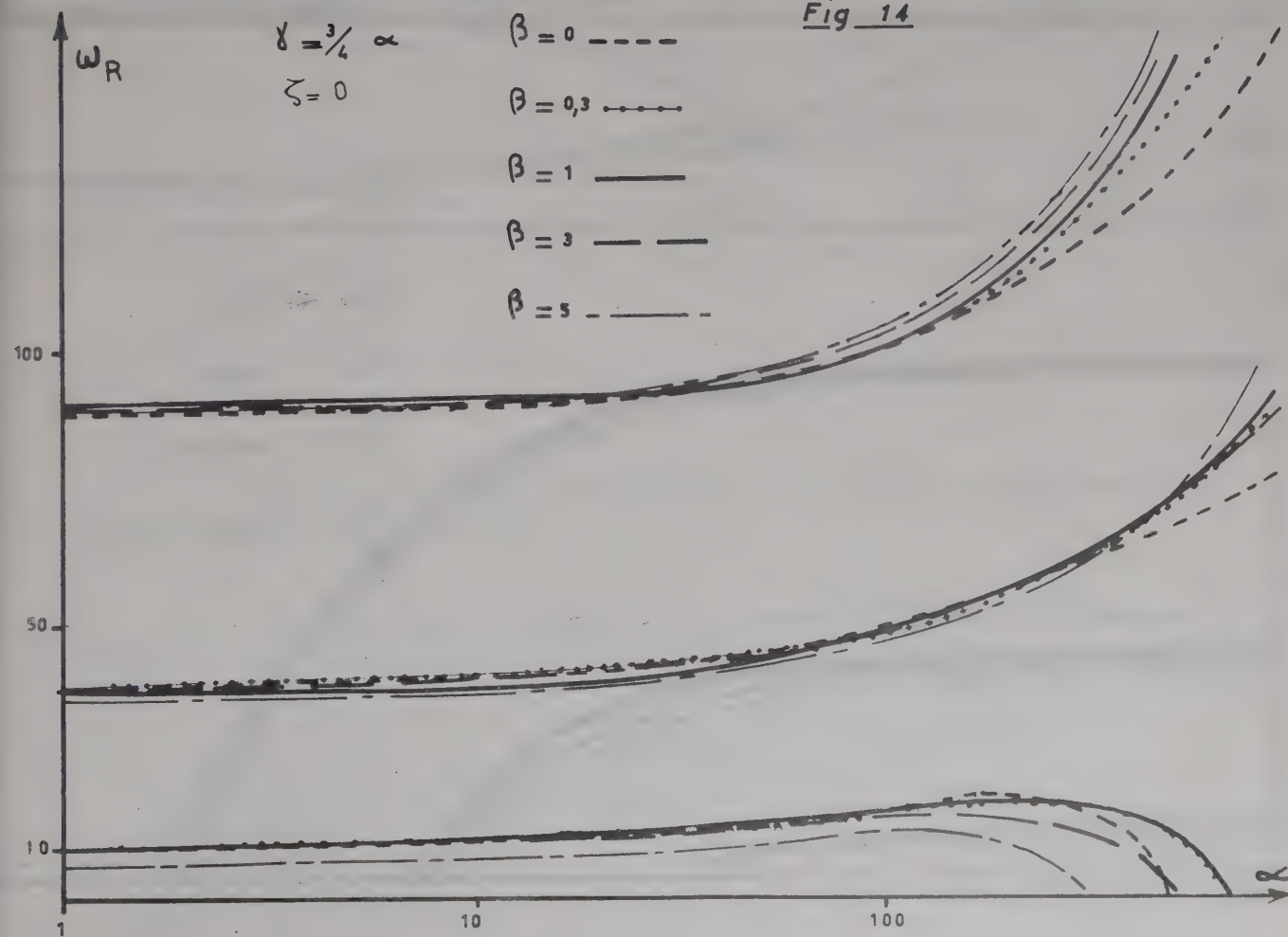


Fig 15

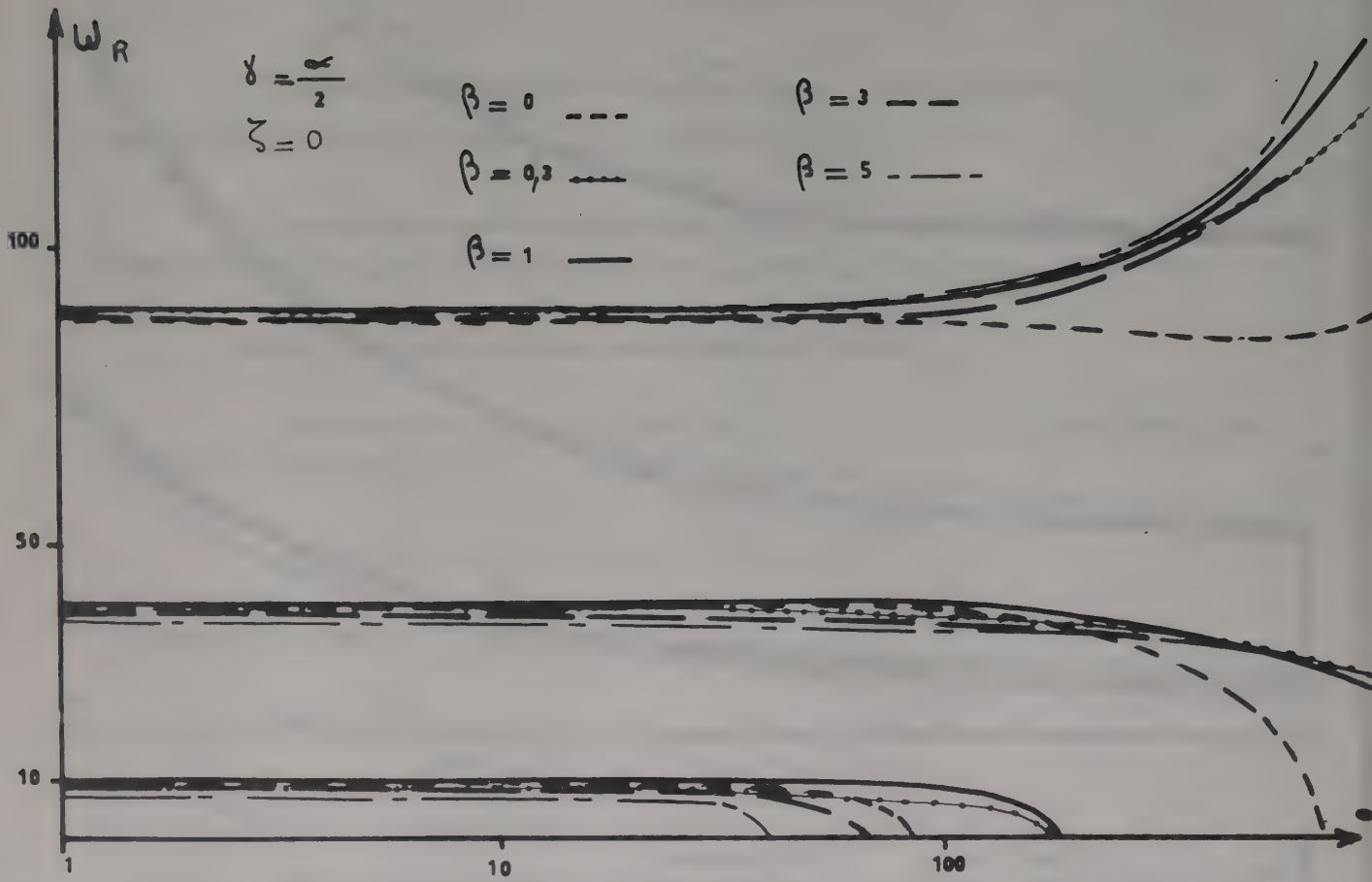


Fig 16

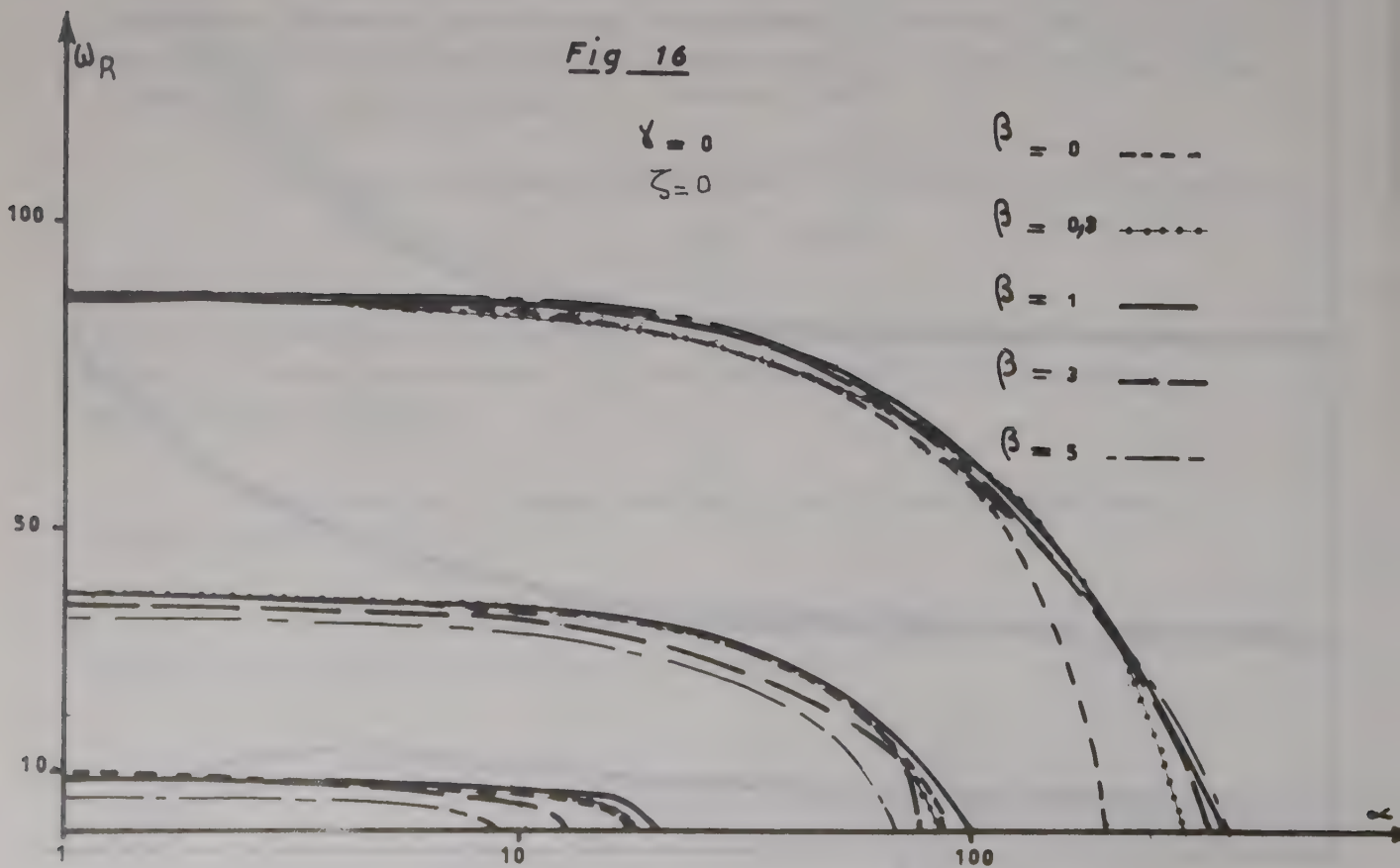
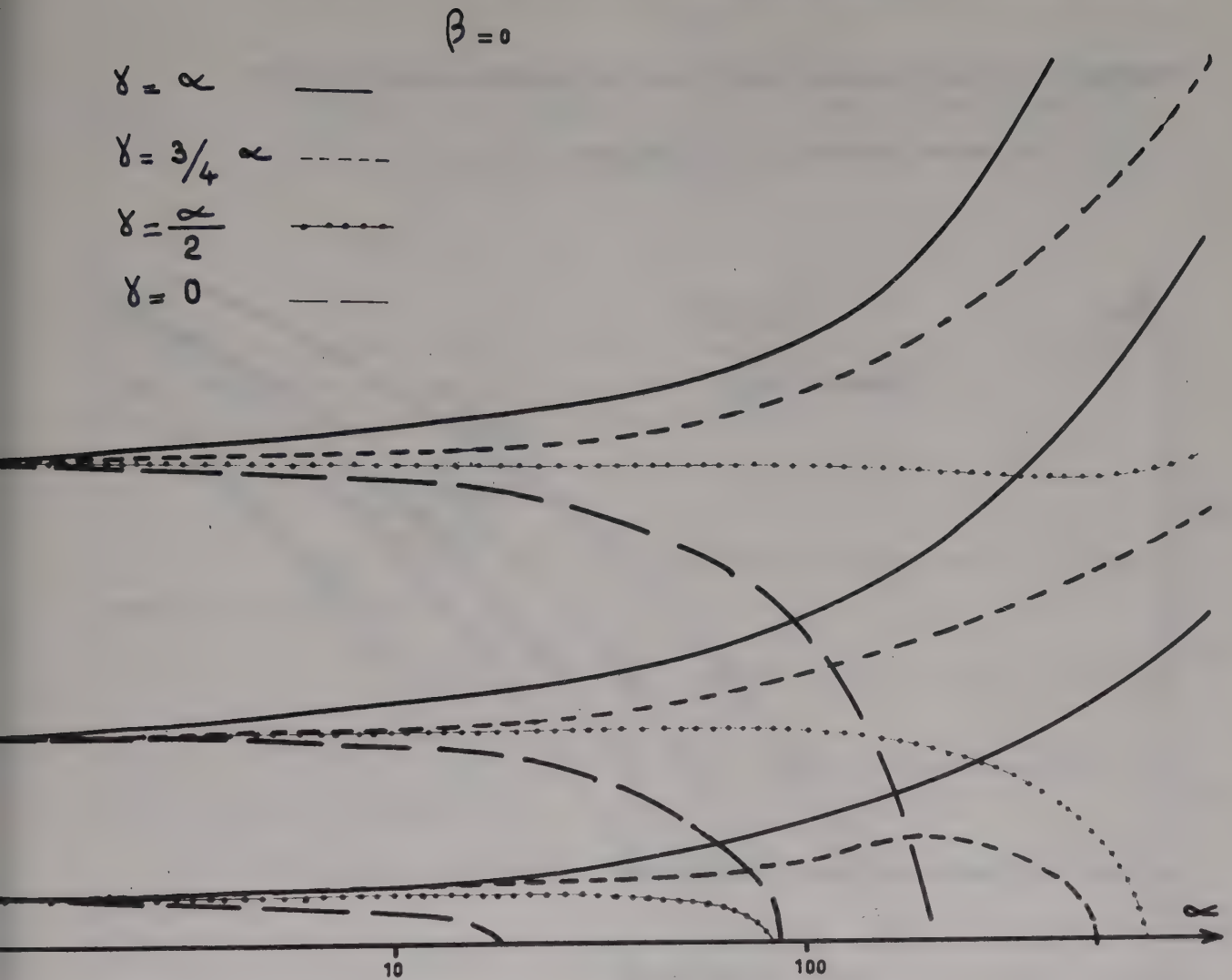


Fig 16 bis



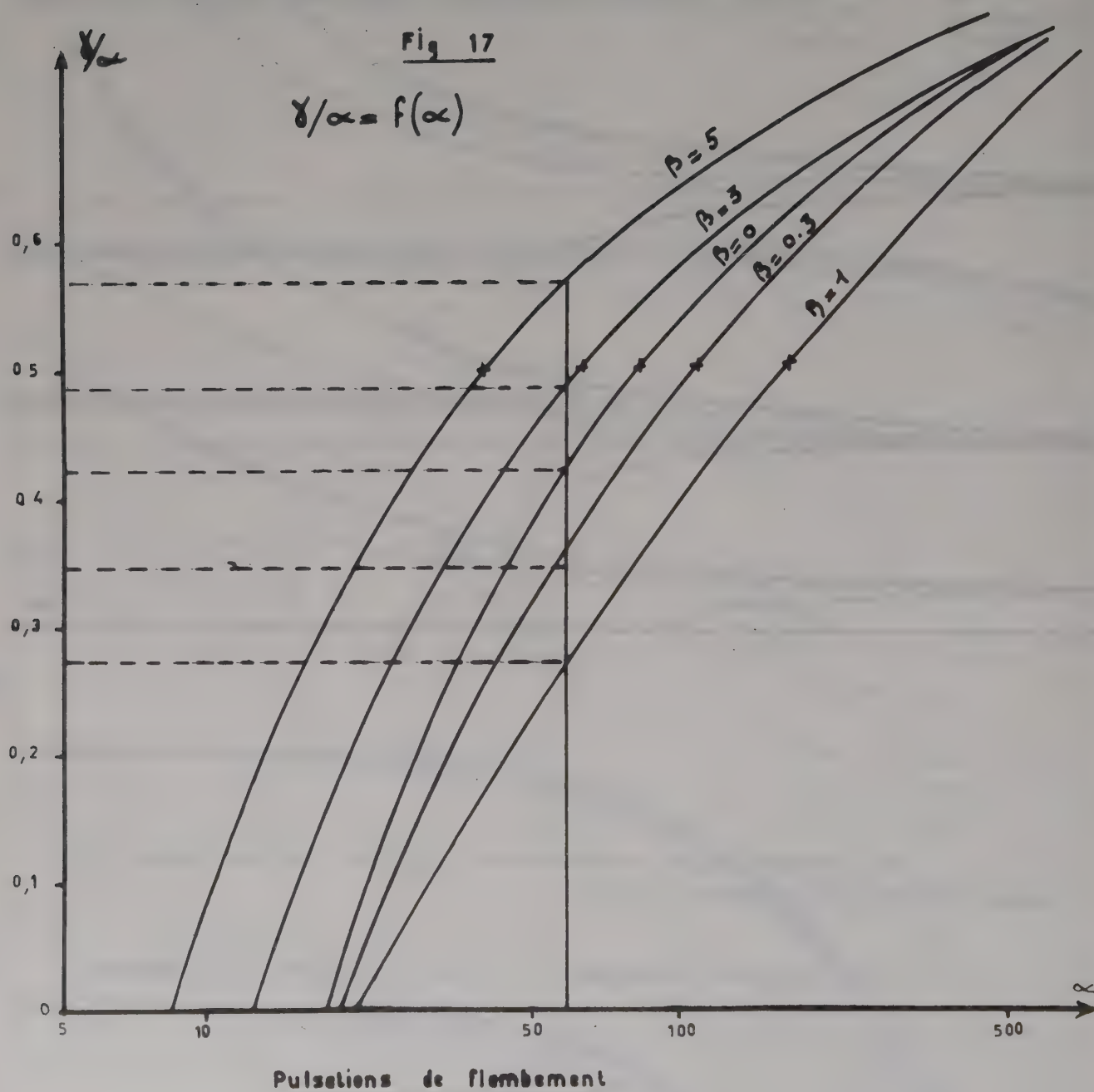
Si μ est négatif, ω_R est sensiblement égal à $\sqrt{\frac{\nu}{2}}$ mais cette quantité étant en général très faible, nous adopterons ω_R si $\mu \leq 0$.

En fait, ω_R ne peut s'annuler que si μ est supérieur à ϵ^2 (paragr. III.2.1 Remarque).

Nous avons remarqué que la pulsation de flambement, ainsi définie, dépendait de β . Elle semble augmenter jusqu'à une valeur de β voisine de l'unité pour diminuer ensuite. Ces résultats sont visibles dans un diagramme $\frac{\gamma}{\alpha} = f(\alpha)$ où nous avons porté pour une valeur de $\frac{\gamma}{\alpha}$ fixée, les valeurs de α correspondant à l'annulation de μ (ou de ω_R si $\beta = 0$) (figure 17).

Remarque - L'instabilité dynamique apparaît avant le flambement puisque la condition

$$\mu > \frac{v^2}{4\zeta^2} > 0 \text{ est plus stricte que } \mu > 0 \text{ (sauf pour } v = 0 \text{)}.$$



ANNEXES

Annexe I - LA SOLUTION DE L'EQUATION 1 (D) PAR DES DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE PUISSANCES DE ξ

Tseng Huang et Donald w Dareing ont étudié l'équation 1 (D) dans deux cas où elle ne présente pas de singularité, c'est-à-dire, lorsque le coefficient $(\gamma^2 - \beta)$ ne s'annule pas, lorsque ξ est compris entre 0 et 1 [réf. 11].

Si $\gamma = 0$ 1 (D) s'écrit

$$V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha \xi V^{(2)} + \alpha V^{(1)} - \lambda V = 0 \quad (D_0)$$

la poutre étant partout en compression.

Si $\gamma = \alpha$ 1 (D) s'écrit

$$V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha(\xi - 1)V^{(2)} + \alpha V^{(1)} - \lambda V = 0 \quad (D_1)$$

la poutre étant partout en traction.

En comptant l'origine des ξ à partir de l'extrémité inférieure de l'arbre, et en posant

$$1 - \xi = \frac{x}{L}$$

on obtient

$$V^{(4)} - i\beta V^{(3)} - \alpha \frac{x}{L} V^{(2)} - \alpha V^{(1)} - \lambda V = 0 \quad (D'_1)$$

Cette équation est identique à (D₁) si on change β en $-\beta$, α en $-\alpha$.

En somme, on peut considérer l'équation unique

$$V^{(4)} + i\beta V^{(3)} + \alpha \xi V^{(2)} + \alpha V^{(1)} - \lambda V = 0$$

avec
$$\begin{cases} \beta > 0, \alpha > 0 & \text{si la poutre est en compression partout} \\ \beta < 0, \alpha < 0 & \text{si la poutre est en traction partout.} \end{cases}$$

Tseng Huang et Donald w Dareing ont recherché des solutions par la méthode de Frobenius.

$V(z)$ est cherché sous la forme de développements en série de z convenablement choisis.

On pose

$$\begin{cases} V_r(z) = z^r (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots) \\ \text{avec } a_0 \neq 0, \quad r \text{ étant à déterminer.} \end{cases}$$

Cette expression est reportée dans l'équation (D) et on identifie à zéro les coefficients de z^{r+n} .

Le coefficient de a_0 donne l'équation indiciale :

$$(r-3)(r-2)(r-1)r = 0$$

Les autres équations fournissent des relations de récurrence entre coefficients

$$(r-2)(r-1)r\{(r+1)a_1 + i\beta a_0\} = 0 \quad R_1$$

$$(r-1)r(r+1)\{(r+2)a_2 + i\beta a_1\} = 0 \quad R_2$$

$$r(r+1)(r+2)\{(r+3)a_3 + i\beta a_2\} + r^2(r+1)a_1 - a_0 = 0$$

.....

$$(r+n+1)(r+n+2)(r+n+3)\{(r+n+4)a_{n+4} + i\beta a_{n+3}\} + (r+n+1)a_{n+1} - a_n = 0$$

.....

Bien que les solutions de l'équation indiciale diffèrent de nombres entiers, ce qui ne fournirait directement qu'une seule solution, la nature des relations de récurrence est telle que la solution correspondant à $r=0$ dépend de quatre constantes a_0, a_1, a_2, a_3 qui peuvent être déterminées pour que la solution $V_r(z)_{r=0}$ soit la solution générale du problème. La résolution se fait ainsi :

A partir de la relation de récurrence, nous avons, en prenant $r=0$

$$a_n = -\frac{i\beta}{n} a_{n-1} + \frac{\lambda a_{n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)(n-2)}$$

$$n \geq 4$$

les relations R_1 et R_2 étant vérifiées.

On peut poser :

$$a_n = A_n a_0 + B_n a_1 + C_n a_2 + D_n a_3$$

avec	$A_0 = 1$	$A_1 = 0$	$A_2 = 0$	$A_3 = 0$
	$B_0 = 0$	$B_1 = 1$	$B_2 = 0$	$B_3 = 0$
	$C_0 = 0$	$C_1 = 0$	$C_2 = 1$	$C_3 = 0$
	$D_0 = 0$	$D_1 = 0$	$D_2 = 0$	$D_3 = 1$

D'où

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = -\frac{i\beta}{n} \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ C_{n-1} \\ D_{n-1} \end{bmatrix} - \gamma \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} \begin{bmatrix} A_{n-3} \\ B_{n-3} \\ C_{n-3} \\ D_{n-3} \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \begin{bmatrix} A_{n-4} \\ B_{n-4} \\ C_{n-4} \\ D_{n-4} \end{bmatrix}$$

ces relations étant valables quelles que soient les conditions aux limites.

Pour le problème que nous étudions, nous avons :

$$V^{(0)} = 0 \quad \text{donc } a_0 = 0$$

$$V^{(2)} + i\beta V^{(1)} = 0 \quad \text{donc } 2a_2 + i\beta a_1 = 0$$

Restent deux coefficients à déterminer

$$V_1 = 0 \quad \text{implique } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

$$V_{(1)}^{(2)} + i\beta V_{(1)}^{(1)} = 0 \quad \text{implique } \sum a_n n(n-1) + i\beta \sum n a_n = 0$$

ces dernières relations s'écrivent

$$\begin{cases} X_1(\alpha, \beta, \lambda) a_1 + X_3(\alpha, \beta, \lambda) a_3 = 0 \\ Y_1(\alpha, \beta, \lambda) a_1 + Y_3(\alpha, \beta, \lambda) a_3 = 0 \end{cases}$$

et l'équation donnant les valeurs propres λ est donnée par

$$\Delta(\lambda) = \det. \begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ le système étant homogène.}$$

Les X_i et les Y_i sont des séries infinies dont les coefficients sont déterminés de proche en proche à partir des relations de récurrence entre les A_n , B_n , C_n et D_n .

Les sommations des séries étant en général pratiquement impossibles, le calcul se fait sur ordinateur par une méthode de relaxation.

— Lorsque β n'est pas nul, λ est complexe. Tsang Huang et Dareing pensent qu'il n'est pas possible d'avoir μ et ν , ils ont cependant trouvé un amortissement critique associé au premier mode sensiblement égal à celui qu'on pourrait déduire des courbes de la figure 9 dans le cas où $\gamma = \alpha$.

— Lorsque β est nul, ces auteurs ont fait des calculs pour différentes conditions aux limites. Ils obtiennent toujours deux équations algébriques linéaires et homogènes et un déterminant de séries infinies.

● Pour $\gamma = 0$ et des conditions aux limites identiques aux nôtres, ils trouvent des coefficients α critiques égaux à :

18,569 ; 86,431 ; 196,29

et identiques, à la précision des calculs près, à ceux que nous avons calculés.

● Lorsque l'extrémité inférieure est libre, Tsang et Dareing montrent que lorsque α est grand, les pulsations de résonance tendent vers celle d'une chaîne de même longueur et de même masse par unité de longueur :

$$\omega_i = \omega_R \quad \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{\rho + \rho_m}{\rho}} \alpha_i$$

α_i étant un des zéros de la fonction de Bessel J_0 .



Annexe II - La résolution de l'équation aux déplacements (D) et la méthode de Laplace -

L'équation (D) s'écrit :

$$V^{(4)} + i \beta V^{(3)} + (\alpha \xi - \gamma) V^{(2)} + \lambda V^{(1)} - \lambda V = 0$$

avec

$$V_{(0)} = V_{(1)} = 0 \quad V_{(0)}^{(1)} + i \beta V_{(0)}^{(2)} = 0 \quad V_{(1)}^{(1)} + i \beta V_{(1)}^{(2)} = 0$$

Les coefficients de cette équation étant des fonctions linéaires de ξ , nous pouvons chercher des solutions sous la forme

$$V(\xi) = \int_{(c)} F(z) e^{z \xi} dz$$

$F(z)$ étant analytique de la variable complexe z , (c) étant un chemin d'intégration convenablement choisi.

Admettant que la dérivation sous le signe somme soit permise

$$\frac{\partial^p V(\xi)}{\partial \xi^p} = \int_{(c)} F(z) z^p e^{z \xi} dz$$

L'équation (D) devient

$$\int_{(c)} [z^4 + i \beta z^3 + (\alpha \xi - \gamma) z^2 + \alpha z - \lambda] F(z) e^{z \xi} dz = 0$$

par intégration par parties de $\int \alpha \xi z^2 e^{z \xi} F(z) dz$, nous obtenons

$$\int_{(c)} [z^4 + i \beta z^3 - \gamma z^2 + \alpha z - \lambda - \alpha \frac{d}{dz}(z^2 F(z))] e^{z \xi} dz + \alpha [z^2 F(z) e^{z \xi}]_{(c)} = 0$$

Si le contour (c) est choisi pour que

$$\left[\alpha z^2 F(z) e^{z \xi} \right]_{(c)} = 0 \quad (A)$$

$$\left\{ \frac{d}{dz} (\alpha z^2 F(z)) = z^2 F(z) (z^2 + i \beta z - \gamma + \frac{\alpha}{z} - \frac{\lambda}{z}) \right. \quad (B)$$

$F(z)$ s'obtient facilement

$$F(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{z^3}{3\alpha}} + \frac{i\beta z^2}{2\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} z + \frac{\lambda}{\alpha z}$$

à une constante multiplicative près que nous choisissons par exemple égale à l'unité.

La partie intégrée est nulle si (c) entoure l'origine $z = 0$ ou commence et aboutit en des points où $z^2 F(z)$ est nul.

$$\text{si } |z| \text{ est grand, } F(z) \sim \frac{e^{\frac{z^3}{3\alpha}}}{z} \quad \text{et } z^2 F(z) \sim z e^{\frac{z^3}{3\alpha}}$$

où $z = a + i b$ et $\alpha > 0$.

Donc $z^2 F(z)$ tend vers zéro en module si z tend vers l'infini si $\Re(z^2) < 0$.

- si $|z|$ est petit, $F(z) \sim \frac{e^{\frac{\lambda z}{\alpha}}}{z}$ et $z^2 F(z) \sim z e^{\frac{\lambda}{i\alpha z}}$

Donc $z^2 F(z)$ tend vers zéro en module si z tend vers zéro si $\Re(\frac{\lambda}{z}) < 0$.

Les contours satisfaisant la condition (A) doivent être tels que :

- s'ils commencent ou aboutissent à l'infini, ce sera pour $\Re(z^2) < 0$,
- s'ils commencent ou aboutissent à l'origine, ce sera pour $\Re(\frac{\lambda}{z}) < 0$

Au voisinage de l'infini

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \text{Arg } z^2 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Soit } \frac{\pi}{2} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2} \quad (k=0)$$

$$\frac{5\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{7\pi}{6} \quad (k=1)$$

$$\frac{9\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{11\pi}{6} \quad (k=2)$$

$$\text{et au voisinage de l'origine } \text{Arg } \lambda - \frac{3\pi}{2} < \text{Arg } z < \text{Arg } \lambda - \frac{\pi}{2}$$

On peut donc envisager sept types de chemin d'intégration :

- les courbes C_{B_1} , C_{B_2} , C_{B_3} partant de l'origine et aboutissant à l'infini,
- les courbes C_{A_1} , C_{A_2} , C_{A_3} ayant des branches infinies,
- la courbe C_{B_0} entourant l'origine.

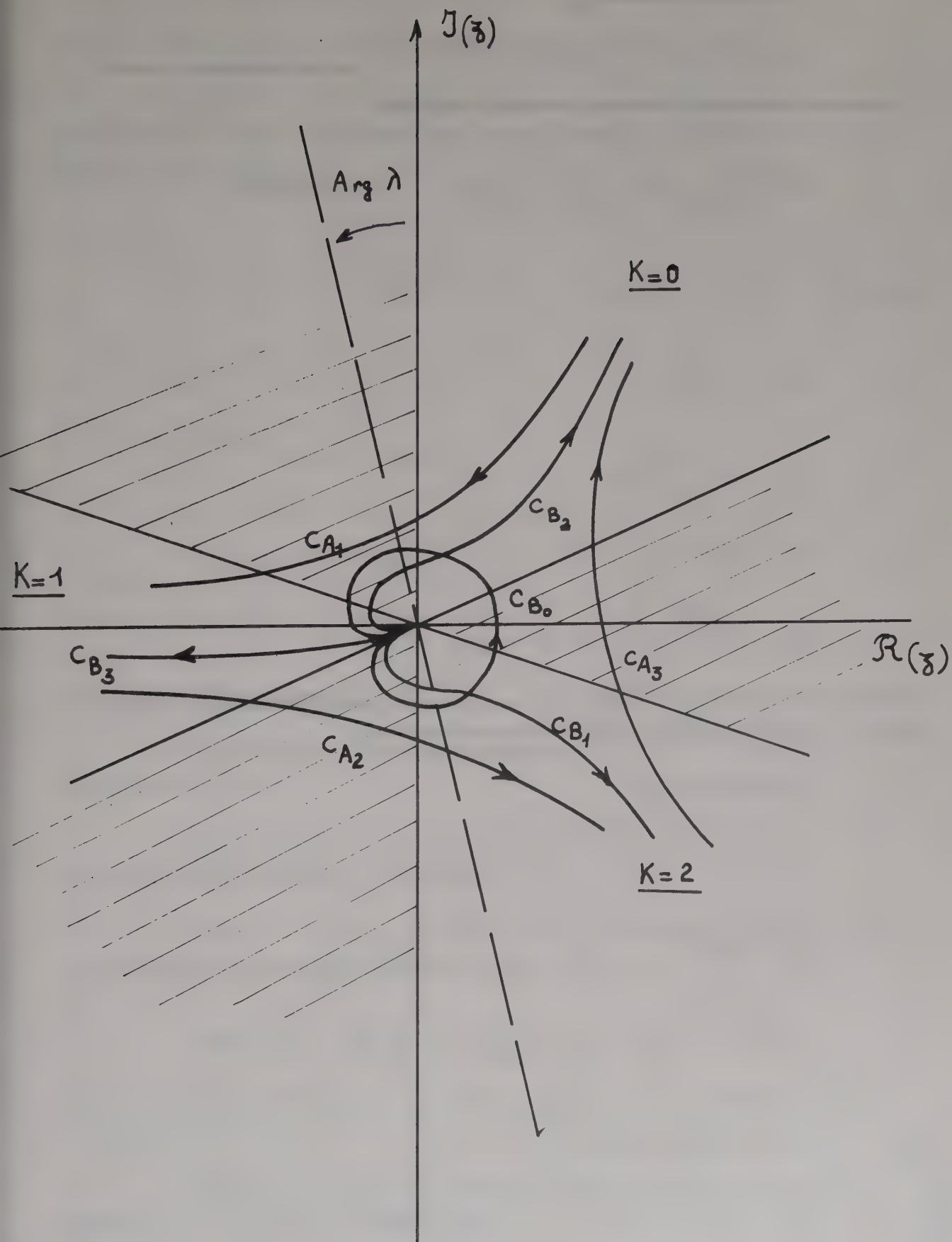
Les résultats des intégrations ne sont pas indépendants et nous avons, avec les orientations choisies :

$$\int_{C_{A_3}} + \int_{C_{A_1}} + \int_{C_{A_2}} = \int_{C_{B_0}}$$

$$-\int_{C_{B_1}} + \int_{C_{A_2}} + \int_{C_{B_3}} = \int_{C_{B_0}}$$

$$\int_{C_{B_3}} + \int_{C_{A_2}} + \int_{C_{A_3}} - \int_{C_{B_1}} = \int_{C_{B_0}}$$

Il n'y a en effet que quatre solutions indépendantes.



Calcul sur le contour C_{B_0}

Sur ce contour $|z|$ est fini et $e^{\frac{z^3}{3\alpha} + i\frac{\beta z^2}{2\alpha}}$ peut se développer en série,

l'intégration terme à terme est possible lorsque l'intégrale

$$B_0^* = \int_{C_{B_0}} \frac{e^{(\xi - \frac{\gamma}{\alpha})z + \frac{\lambda}{\alpha}z}}{z} dz \quad \text{a été calculée.}$$

on pose $\frac{\sigma^2}{4} = -\frac{\lambda}{\alpha} (\xi - \frac{\gamma}{\alpha})$ soit $\frac{\sigma}{2} = \{(\xi - \frac{\gamma}{\alpha})(-\frac{\lambda}{\alpha})\}^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\lambda}{\alpha z} = -\frac{\sigma^2}{4u}$$

$$B_0^* = \int \frac{e^{u - \frac{\sigma^2}{4u}}}{u} du$$

Soit avec $u = \frac{\sigma v}{2}$ soit $z = (-\frac{\lambda}{\alpha})^{\frac{1}{2}} (\xi - \frac{\gamma}{\alpha})^{\frac{1}{2}} v$

$$B_0^* = \int \frac{e^{\frac{\sigma}{2}(v - \frac{1}{v})}}{v} dv = 2i\pi J_0(\sigma)$$

l'intégration étant faite dans le plan des v sur un contour convenablement choisi, J_0 désignant la fonction de Bessel d'ordre zéro, de première espèce.

En remarquant que

$$W_n(\xi) = \int \frac{v^n e^{\frac{\sigma}{2}(v - \frac{1}{v})}}{v} dv = J_{-n}(\sigma) 2i\pi = (-1)^n J_n(\sigma) \cdot 2i\pi$$

$$e^{\frac{z^3}{3\alpha} + i\frac{\beta z^2}{2\alpha}} = 1 + \frac{i\beta}{2} z^2 + \frac{z^3}{3\alpha} + \left(\frac{i\beta z^2}{2\alpha}\right)^2 \frac{1}{2!} + \dots$$

$$\int z^n e^{\frac{\sigma}{2}(v - \frac{1}{v})} \frac{dv}{v} = (-1)^n J_n(\sigma) \cdot 2i\pi \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{n/2} \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-n/2}$$

$$\int_{C_{B_0}} = 2i\pi \left\{ J_0(\sigma) + \frac{i\beta}{2\alpha} J_2(\sigma) \cdot \frac{\sigma^2}{4} + \dots \right\}$$

$$\frac{\sigma}{2} = \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut remarquer que $J_0(\sigma)$ est solution d'une équation du type de celle de Clifford [réf. 15 p. 325]

$$\left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right) V^{(2)} + \alpha V^{(1)} - \lambda V = 0$$

obtenue en négligeant les deux premiers termes de l'équation aux déplacements.

Un calcul formel permet d'ailleurs de retrouver cette expression obtenue par Tseng Huang. On cherche à développer la solution sur l'ensemble des fonctions de Clifford généralisées de première espèce

$$C_n \left\{ \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \right\}$$

$$V(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n \left\{ \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \right\}$$

avec
$$C_n \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\frac{n}{2}} n \left\{ 2 \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

On trouve

$$a_0 = 1 ; a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{i\beta}{2\lambda} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 ; a_3 = \frac{1}{3\lambda} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^4 ; a_4 = -\frac{i\beta}{4\lambda} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) a_2$$

et la relation de récurrence

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^4 a_q - i\beta \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 a_{q+1} - (q+3)\lambda a_{q+3} = 0 \quad q \geq 2$$

Les solutions sur les contours C_{A_1} , C_{A_2} , C_{A_3} , C_{B_1} , C_{B_2} , C_{B_3} .

Si nous analysons les travaux de Rabenstein [réf.5], nous pouvons en tirer les conclusions suivantes :

Cet auteur étudie une équation qui ne contient pas de termes du type $i\beta \frac{V}{\lambda^3 \xi}$ et trouve des résultats simples dans un seul cas :

lorsque $\left|\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right| > M$, les solutions sur les contours C_{B_i} peuvent être développées en séries de fonctions de Hankel du type

$$i\pi \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-\frac{n}{2}} H_0^1 \left\{ 2 \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

solutions correspondant d'ailleurs à des combinaisons des solutions de deuxième espèce de l'équation de Clifford.

Malheureusement ce type de solution ne correspond pas aux données de notre problème où $\xi - \frac{\gamma}{\alpha}$ varie au voisinage de zéro.

Restent les autres types de solution lorsque $\left|\xi - \frac{\gamma}{\alpha}\right| < M$

Sur les contours C_{A_i} , Rabenstein fait apparaître une intégrale d'Airy, mais dans notre cas, le terme en β rendrait le calcul plus compliqué.

Sur les contours C_{B_i} , on peut théoriquement trouver des développements asymptotiques, les résultats sur les autres contours étant tous connus.

En admettant que ces solutions soient connues, la suite du calcul serait encore relativement compliquée puisque les développements sont formels, les conditions aux limites n'ayant pas été encore introduites et λ ne pouvant être connu qu'en fin de calcul, est, par surcroît, complexe.

Sauf dans certains cas particuliers ($\beta = 0$, $\gamma = 0$ par exemple), la méthode semble difficilement utilisable.



Annexe III - Influence de la direction des couples d'extrémités sur les valeurs propres -

Nous avons vu que l'apparition de valeurs propres complexes était due au couple Γ . Les parties imaginaires des nombres λ ont une influence directe sur la stabilité et il semble intéressant d'évaluer l'effet de la direction du couple sur les valeurs de λ .

Nous avons assimilé les extrémités à des rotules ne pouvant transmettre qu'un couple vertical, cette schématisation est, dans une certaine mesure, arbitraire, car la direction exacte du couple est, dans la pratique, difficile à déterminer, et dépend de la réalisation mécanique de la liaison et son influence n'est pas toujours négligeable. [13].

Nous ferons ici l'hypothèse que la déformée possède des points d'inflexion aux deux extrémités, ou, ce qui revient au même, que le couple est tangent à la ligne moyenne aux extrémités, puisque

$$\vec{C} \wedge \vec{r} = E I \vec{M}_{ss}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} V_{(0)} = V_{(1)} = 0 \\ V_{(0)}^2 = V_{(1)}^2 = 0 \end{cases}$$

V est cherché sous forme d'une série

$$V = \sum (a_n + i b_n) \sin n \pi \xi$$

L'équation aux valeurs propres λ s'écrit :

$$L_0(V) + i L_1(V) = \lambda V$$

avec

$$L_0(\sin n \pi \xi) = n^4 \pi^4 \sin n \pi \xi - (\alpha \xi - \gamma) n^2 \pi^2 \sin n \pi \xi + \alpha n \pi \cos n \pi \xi$$

$$L_1(\sin n \pi \xi) = -\beta n^3 \pi^3 \cos n \pi \xi$$

En suivant la même méthode que précédemment, les équations à l'ordre p s'écrivent :

$$\sum_{n=1}^p a_n \{ [n^4 \pi^4 - (\alpha \xi - \gamma) n^2 \pi^2] \sin n \pi \xi + \alpha n \pi \cos n \pi \xi \} - b_n [-\beta n^3 \pi^3 \cos n \pi \xi] = \frac{\lambda}{2} a_n$$

$$\sum_{n=1}^p a_n [-\beta n^3 \pi^3 \cos n \pi \xi] + b_n \{ [n^4 \pi^4 - (\alpha \xi - \gamma) n^2 \pi^2] \sin n \pi \xi + \alpha n \pi \cos n \pi \xi \} = \frac{\lambda}{2} b_n$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K^* & -K_1^* \\ K_1^* & K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Matrice K^*

$$K_{m,m}^* = \frac{m^2 \pi^2}{2} \cdot [m^2 \pi^2 + \gamma - \frac{\alpha}{2}]$$

$$K_{n+2q+1,n}^* = \frac{2mn\alpha}{(m^2 - n^2)^2} (m^2 + n^2)$$

$$K_{n+2q+2,n}^* = 0$$

Matrice K_1^*

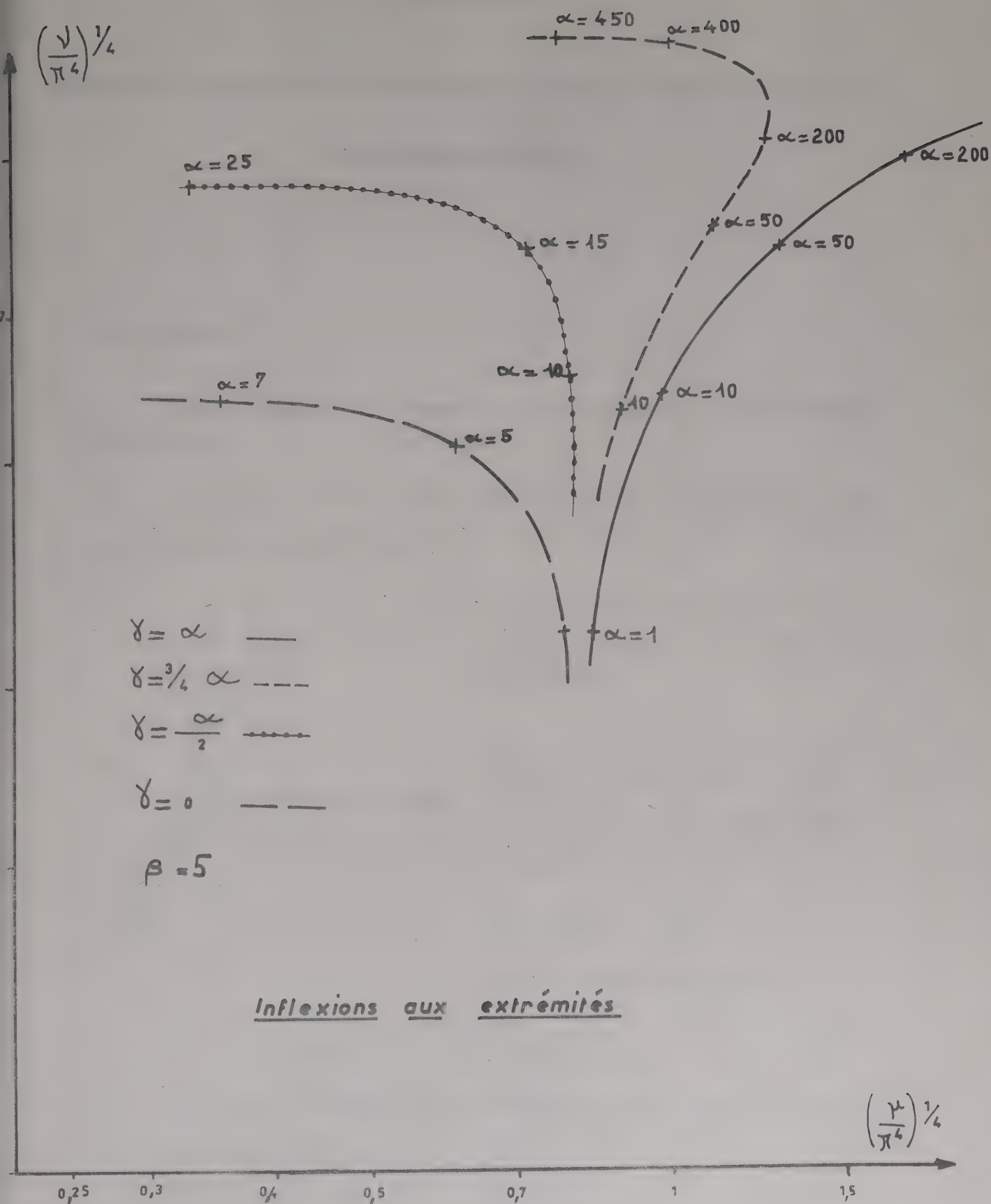
$$K_{m,m}^* = 0$$

$$K_{n+2q+1,n}^* = -\frac{2\beta mn}{m^2 - n^2} n^2 \pi^2$$

$$K_{n+2q+2,n}^* = 0$$

Les calculs ont été effectués pour une valeur élevée de β ($\beta = 5$) et n'ont pas mis en évidence un écart notable avec les résultats précédents comme l'indique le diagramme ci-contre.

Si nous comparons ces matrices avec celles obtenues précédemment, nous voyons que les termes diffèrent peu, K_{mm}^* ne dépend plus de β et K_1^* est gyroscopique, alors que K_1 ne l'était que pour certains coefficients.



Deuxième partie

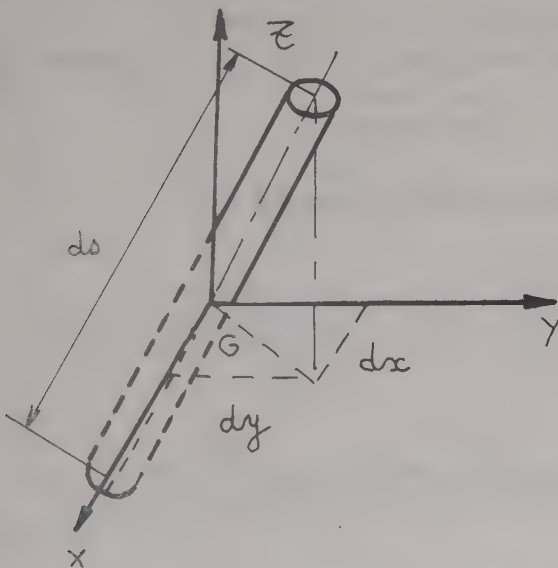
Influence de la rotation propre d'un arbre soumis à des efforts de torsion et de compression sur ses pulsations propres

+++++

I - Mise en équations -

Nous nous proposons ici de déterminer l'influence de la rotation propre d'un arbre sur ses pulsations propres.

Pour calculer le terme dû au moment dynamique, négligé jusqu'ici, nous assimilerons le rotor à une distribution de gyroscopes élémentaires sur la ligne moyenne de l'arbre de rayon R et de section circulaire pleine sauf avis contraire.



Soit $\vec{\Omega}_R$ le vecteur rotation propre de l'arbre, sensiblement porté par $\vec{z}$ et sensiblement constant en module

$$\vec{\Omega}_R = \omega_A \vec{z}$$

Les composantes du vecteur rotation d'entraînement de l'arbre par rapport à des axes $\vec{GX}$, $\vec{GY}$, $\vec{GZ}$ parallèles aux axes fixes et issus du centre de masse G de l'élément de longueur ds sont :

$$\vec{\Omega}_E = \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \vec{Y} - \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \vec{X}$$

Le vecteur rotation de l'élément ds est

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_E + \vec{\Omega}_R \neq \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \vec{Y} - \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \vec{X} + \omega_A \vec{z}$$

En appliquant le théorème de Koenig, le moment dynamique par rapport à G s'écrit :

$$\vec{M}(\mathcal{R}, G) = I \dot{\vec{\Omega}}_E + \vec{\Omega}_E \wedge dC \omega_A \vec{z}$$

avec :

$$dC = \frac{dm R^2}{2}$$

$$\text{et } I = G(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} dm \left(\frac{R^2}{4} + \frac{ds^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & dm \left(\frac{R^2}{4} + \frac{ds^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & dm \frac{R^2}{2} \end{vmatrix}$$

Si nous utilisons les approximations classiques de la théorie du gyroscope, qui re-
viennent à linéariser, le moment dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{m}(t, G) = & \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} ds - \rho \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} ds \right) \vec{X} \\ & + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} ds + \rho \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} ds \right) \vec{Y} \end{aligned}$$

Les équations (4) et (5) deviennent :

$$\frac{C_x}{s} + F_z \frac{\partial y}{\partial s} - F_y \frac{\partial z}{\partial s} = \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \rho \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial s} - F_z \frac{\partial x}{\partial s} + F_x \frac{\partial z}{\partial s} = \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + \rho \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \quad (5)$$

Soit, compte tenu des linéarisations et après dérivation par rapport à s :

$$\frac{F_y}{s} = \frac{\partial^2 C_x}{\partial s^2} + (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \rho g S \frac{\partial y}{\partial s} - \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} \frac{\partial^3 x}{\partial t \partial s^2} + \rho \omega_A \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial s^2} \quad (4)$$

$$\frac{F_x}{s} = - \frac{\partial^2 C_y}{\partial s^2} + (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \rho g S \frac{\partial x}{\partial s} + \rho \omega_A \frac{SR^2}{2} \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial s^2} + \rho \omega_A \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial s^2} \quad (5)$$

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$\begin{aligned} S \ddot{x} + \rho g S \frac{\partial x}{\partial s} - (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} - \Gamma \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + b \dot{x} + \\ - \rho_m S g \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \rho S \omega_A \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) - \rho \frac{SR^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rho S \ddot{y} + \rho g S \frac{\partial y}{\partial s} - (F_0 - S \rho g s) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \Gamma \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} + b \dot{y} +$$

$$- \rho_m S g \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \rho S \omega_A \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) - \rho \frac{S R^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (2)$$

Finalement, en posant $U = x + i y$ et en multipliant par $\frac{l^4}{EI}$ et en utilisant les changements de variables et les paramètres sans dimensions définis précédemment avec

$$\delta = \frac{\omega_A}{\Omega} \frac{R^2}{2l^2}$$

l'équation aux déplacements devient :

$$(D) \quad U^{(4)} + i \beta U^{(3)} + \alpha [\xi U^{(1)}]^2 - \gamma U^{(2)} + U'' + 2 \zeta U' + i \delta [U^{(2)}]' - [U^{(2)}]'' \frac{R^2}{4l^2} = 0$$

Dans cette équation, le dernier terme est négligeable devant les autres et nous n'en tiendrons pas compte, sa contribution étant de l'ordre de celle du terme de déformation provenant de l'effort tranchant, déformation dont nous n'avons pas tenu compte.

Remarque sur le terme $\delta [U^{(2)}]'$.

Ce terme provient du couplage gyroscopique et est proportionnel au coefficient δ qui ne dépend que de ω_A , R , ρ et E pour une section circulaire pleine.

$$\delta = \omega_A \sqrt{\frac{\rho S l^4 R^4}{EI \cdot 4l^4}}$$

$$\delta = \frac{\omega_A R}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Pour une section à symétrie de révolution, nous pouvons définir un rayon équivalent par la formule :

$$\int_S r^2 dS = \frac{S R_e^2}{2}$$

$$D'où I = \frac{S R_e^2}{4} \text{ pour un matériau homogène,}$$

$$\text{et } \delta = \frac{\omega_A R_e}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Le couplage gyroscopique rend l'opérateur non séparable. Nous allons cependant déterminer la solution exacte de l'équation (D) dans le cas où α et β sont nuls pour résoudre ensuite dans le cas général par la méthode de Galerkin.

Les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas où δ est nul.

II - Résolution -

II.1 - Solution exacte du cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\zeta = 0$ -

Nous étudions ici le cas sans amortissement, si γ est positif l'arbre est soumis à une traction uniforme, si γ est négatif, l'arbre est en compression puisque α est nul.

L'équation aux déplacements (D) s'écrit :

$$U^{(4)} + i \delta U^{(2)} - \gamma U'' + U'' = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} U(0, \tau) = 0 & U^{(2)}(0, \tau) = 0 \\ U(1, \tau) = 0 & U^{(2)}(1, \tau) = 0 \end{cases}$$

comme conditions aux limites,

$$U(\xi, 0) = U_1(\xi) \quad \text{et} \quad U'(\xi, 0) = U_2(\xi)$$

comme conditions initiales.

Cherchons des solutions particulières non amorties de la forme

$$U = e^{iN\tau} e^{r\xi} \quad \text{où } N \text{ est réel,}$$

le terme gyroscopique n'introduisant pas de dissipation d'énergie.

r et N satisfont alors l'équation bicarrée :

$$r^4 - r^2(N\delta + \gamma) - N^2 = 0$$

dont les solutions sont

$$r_i^2 = \frac{N\delta + \gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N\delta + \gamma)^2 + 4N^2}$$

le terme sous le radical est un trinôme en N dont le discriminant est $-4N^2$, ce terme est donc positif.

$$\text{Posons } \begin{cases} r_1^2 > 0 \\ r_2^2 < 0 = (ir_3)^2 \end{cases}$$

une solution $V(\xi)$ peut s'écrire :

$$V(\xi) = A \operatorname{ch} r_1 \xi + B \operatorname{sh} r_1 \xi + C \cos r_3 \xi + D \sin r_3 \xi$$

où A, B, C, D, doivent satisfaire des conditions imposées par les conditions aux limites :

$$\xi = 0 \quad \begin{cases} V(0) = 0 & \text{soit } A + C = 0 \\ V_{(0)}^{(2)} = 0 & \text{soit } A r_1^2 - C r_3^2 = 0 \end{cases}$$

Donc $A = -C = 0$

$$\xi = 1 \quad \begin{cases} V(1) = 0 & \text{soit } [B \operatorname{sh} r_1 \xi + B \sin r_3 \xi]_{\xi=1} = 0 \\ V_{(1)}^{(2)} = 0 & \text{soit } [B r_1^2 \operatorname{sh} r_1 \xi - D r_3^2 \sin r_3 \xi]_{\xi=1} = 0 \end{cases}$$

Donc $\sin r_3 (r_1^2 + r_3^2) \cdot \operatorname{sh} r_1 = 0$

Finalement $r_3 = n\pi$ et $B = 0$

D'où N en portant r_3 dans l'expression trouvée ci-dessus

$$2n^2\pi^2 = - (N\delta + \gamma) + \sqrt{(\delta^2 + 4)N^2 + 2N\delta\gamma + \gamma^2}$$

$$N_n = \frac{n^2\pi^2}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\left(1 + \frac{\gamma}{n^2\pi^2}\right)} \right\}$$

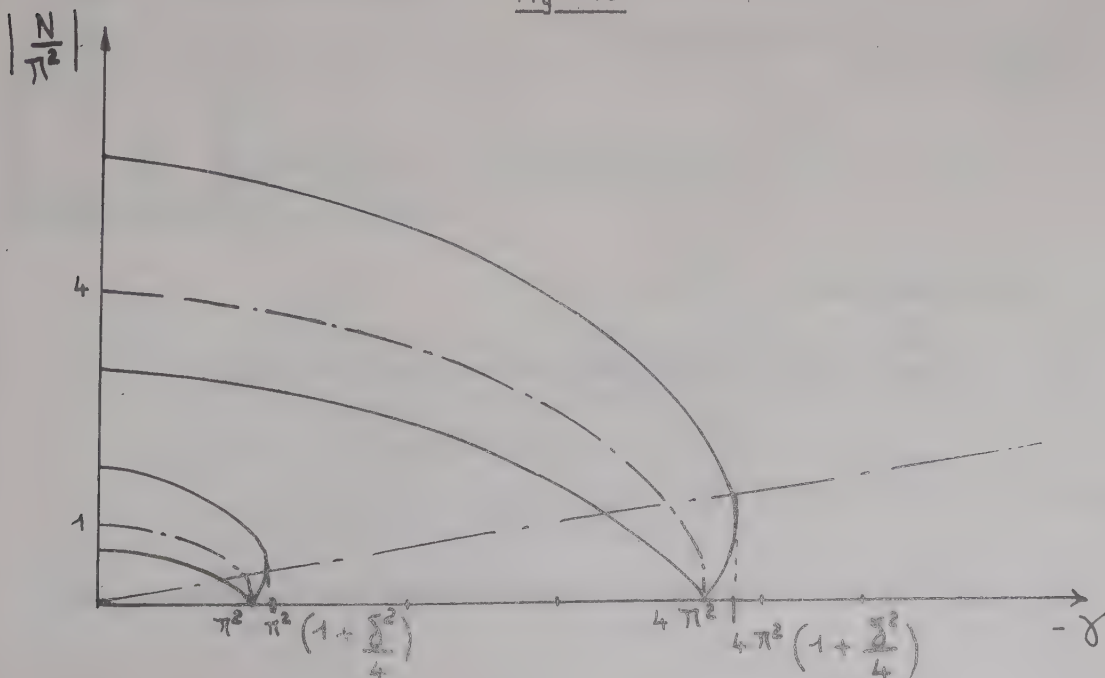
La forme générale de la solution $U_n(\xi, \tau)$ est donc

$$U_n(\xi, \tau) = \left\{ (a_n + i b_n) e^{\frac{i n^2 \pi^2}{2} (\delta + \sqrt{\cdot}) \tau} + (c_n + i d_n) e^{\frac{i n^2 \pi^2}{2} (\delta - \sqrt{\cdot}) \tau} \right\} \sin n\pi\xi$$

$$\text{et } U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi, \tau)$$

■ Il y a dédoublement des pulsations propres, le diagramme $\left(\frac{|N|}{\pi^2}, -\gamma\right)$ présentant l'allure suivante (figure 18).

Fig 18



Stabilité -

Le système est stable si ses pulsations $\omega_{Rn} = |N_n|$ sont réelles, donc si

$$1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} + \frac{\delta^2}{4} = 0$$

L'instabilité apparaît ici par confusion de pulsations propres pour $\gamma = (\delta^2 + 4)\pi^2$; cette valeur critique constituant une frontière entre une zone stable et une zone instable.

- Montrons que la solution formelle trouvée constitue la solution de l'équation (D).

Les fonctions complexes U_1 et U_2 sont nulles pour $\xi = 0$ et $\xi = 1$ et continues, donc, peuvent être développées en séries de Fourier en $\sin n \pi \xi$

$$U_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + i B_n) \sin n \pi \xi$$

$$U_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + i D_n) \sin n \pi \xi$$

Identifions terme à terme les déplacements et les vitesses à l'instant initial.

$$(a_n + c_n) + i(b_n + d_n) = A_n + i B_n$$

$$i \frac{n^2 \pi^2}{2} \{(\delta + \sqrt{\gamma}) a_n + (\delta - \sqrt{\gamma}) c_n\} - \frac{n^2 \pi^2}{2} \{(\delta + \sqrt{\gamma}) b_n + (\delta - \sqrt{\gamma}) d_n\} = C_n + i D_n$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ \frac{n^2 \pi^2}{2} (\delta + \sqrt{\gamma}) & \frac{n^2 \pi^2}{2} (\delta - \sqrt{\gamma}) & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 0 & | & -\frac{n^2 \pi^2}{2} (\delta + \sqrt{\gamma}) & -\frac{n^2 \pi^2}{2} (\delta - \sqrt{\gamma}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \\ b_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ D_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix}$$

et tous calculs faits :

$$a_n + i b_n = (A_n + i B_n) \frac{\delta - \sqrt{\gamma}}{-\sqrt{\gamma}} - i (C_n + i D_n) \frac{1}{n^2 \pi^2 \sqrt{\gamma}}$$

$$c_n + i d_n = (A_n + i B_n) \frac{\delta + \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} + i (C_n + i D_n) \frac{1}{n^2 \pi^2 \sqrt{\gamma}}$$

Si U_1 est continue, à dérivée troisième généralement continue, les termes en A_n et B_n

sont en $\frac{1}{n^4}$.

Si U_2 est continue, les termes en C_n et D_n sont en $\frac{1}{n^4}$ au moins.

La série $U_n(\xi, \tau)$, majorée par une série numérique de terme $|a_n + i b_n| + |c_n + i d_n|$ convergente, est uniformément convergente, et représente la solution du problème.

Sa dérivée par rapport au temps réduit est en $\frac{1}{n^3}$ et converge vers U_2 .

Dans le cas de choc initial, U_2 est en $\frac{1}{n}$ et la convergence est uniforme sauf aux points de discontinuité de U_2 .

Nous reviendrons ultérieurement sur les résultats concernant la stabilité.

II.2 - Solution du cas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\zeta \neq 0$.

Dans cette étude, nous tenons compte de l'amortissement externe caractérisé par le coefficient ζ .

L'équation aux déplacements (D) s'écrit :

$$U^{(4)} - \gamma U^{(2)} + i \delta U^{(2)} + 2 \zeta U' + U'' = 0$$

Effectuons le changement de fonction :

$$U = e^{-\zeta \tau} \eta(\xi, \tau)$$

$\eta(\xi, \tau)$ vérifie l'équation (D _{η})

$$\eta^{(4)} - (\gamma + i \delta \zeta) \eta^{(2)} + i \delta \eta^{(2)} + \eta'' - \zeta^2 \eta = 0 \quad (D_\eta)$$

Nous en chercherons des solutions particulières en nous appuyant sur les résultats obtenus si l'amortissement est nul.

$$\text{Posons : } \eta_n(\xi, \tau) = \sin n \pi \xi e^{(M^* + i N) \tau}, \quad M^* \text{ et } N \text{ étant réels}$$

La fonction $\eta_n(\xi, \tau)$ vérifie les conditions aux limites du problème ;

M^* et N doivent vérifier la relation :

$$n^4 \pi^4 + n^2 \pi^2 [\gamma + i \delta \zeta] - i \delta n^2 \pi^2 (M^* + i N) + M^{*2} - N^2 + 2 i M^* N - \zeta^2 = 0$$

Soit en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} n^4 \pi^4 + n^2 \pi^2 (\gamma + N \delta) + M^{*2} - N^2 - \zeta^2 = 0 & (1) \\ n^2 \pi^2 [\delta (\zeta - M^*) + 2 M^* N] = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) peut s'écrire :

$$M^*(2N - n^2 \pi^2 \delta) = -n^2 \pi^2 \delta \zeta$$

expression, qui, portée dans l'équation (1) donne

$$[n^4 \pi^4 + n^2 \pi^2 (\gamma + N \delta) - N^2 - \zeta^2] (2N - n^2 \pi^2 \delta) + n^4 \pi^4 \delta^2 \zeta^2 = 0$$

$$\{n^4 \pi^4 (1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4}) - X_n\} \{4X_n + n^4 \pi^4 \delta^2\} + n^4 \pi^4 \delta^2 \zeta^2 = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} X_n = N^2 - n^2 \pi^2 \delta N \\ 2N - n^2 \pi^2 \delta \neq 0 \end{cases} \quad \text{soit } \delta \zeta \neq 0$$

$$-4X_n^2 + X_n [4n^4 \pi^4 (1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4}) - n^4 \pi^4 \delta^2] + (n^4 \pi^4)^2 \delta^2 (1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}) = 0$$

$$X_n = \frac{n^4 \pi^4}{-8} \left\{ \delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) \pm \sqrt{\left[\delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) \right]^2 + 16 \delta^2 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} \right)} \right\}$$

Soit, en revenant à la variable N,

$$\text{en posant } \begin{cases} Y_n = \delta^2 + 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) \\ Z_n = \frac{4 \zeta \delta}{n^2 \pi^2} \end{cases}$$

$$\left| \begin{aligned} N_n &= \frac{n^2 \pi^2}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}} \right\} \\ M_n^* &= \mp \delta \zeta \frac{1}{\sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}}} \end{aligned} \right. \quad \delta \zeta \neq 0$$

La détermination négative devant $\frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}$ étant à éliminer puisque

M^* et N sont réels par hypothèse.

Nous en déduisons les expressions de U_n et de U

$$\left| \begin{aligned} U_n(\xi, \tau) &= e^{-\zeta \tau} [(a_n + i b_n) e^{(M_+^* + i N_+) \tau} + (c_n + i d_n) e^{(M_-^* + i N_-) \tau}] \sin n \pi \xi \\ U(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi, \tau) \end{aligned} \right.$$

On démontrerait, comme dans le cas précédent, que cette solution constitue la solution exacte du problème linéarisé.

Remarque - Nous avons supposé $\delta \zeta \neq 0$ soit δ ou ζ non nul, ces cas particuliers se traitent aisément.

■ $\delta = 0 \quad \zeta \neq 0$

$$N = 0 \quad M^* = \pm n^2 \pi^2 \sqrt{\left(\frac{\zeta}{n^2 \pi^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}\right)}$$

ce cas correspond à un amortissement très élevé tel que :

$$\frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} > 1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}$$

• $\delta \neq 0, \quad \zeta = 0, \quad Z_n = 0$

$$N = \frac{n^2 \pi^2 \delta}{2} \quad M^* = \pm \sqrt{-\frac{\delta^2}{4} - \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}\right) - n^2 \pi^2}$$

Ce cas est purement théorique, il correspond aux oscillations instables du paragraphe II. 1.

$$\delta^2 + 4\left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}\right) < 0$$

II.3 - Analyse des résultats précédents -

Considérons en premier lieu le cas où δ est nul.

II.3.1 - $\delta = 0$ ($\omega_A = 0$)

■
$$U(\xi, \tau) = e^{-\zeta \tau} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{i n^2 \pi^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4}} \tau} + \right. \\ \left. + (c_n + i d_n) e^{-i n^2 \pi^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4}} \tau} \right\} \sin n \pi \xi$$

avec $1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} > 0$

■
$$U(\xi, \tau) = e^{-\zeta \tau} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} - \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}\right)} \tau} + \right. \\ \left. + (c_n + i d_n) e^{n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} - \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2}\right)} \tau} \right\} \sin n \pi \xi$$

avec $1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} < 0$.

- Si l'amortissement est faible, les fonctions de déformations sinusoïdales vibrent à des pulsations différentes, mais s'amortissent toutes dans le temps réduit avec le facteur $e^{-\zeta \tau}$.

L'amortissement ζ affecte d'autant moins les pseudo-pulsations que n est élevé.

- Si l'amortissement est très élevé ou tel qu'on puisse trouver une valeur n_c de n telle que :

$$1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \text{ soit négatif}$$

Les formes propres associées à toutes les valeurs entières de n telles que $n < n_c$ correspondent à des mouvements d'oscillations hypercritiques.

II.3.2 - $\delta \neq 0$ -

II.3.2.1 - Cas non amorti -

Le mouvement libre est une superposition d'oscillations non amorties, le couplage gyroscopique dédouble toutes les pulsations propres réduites $\omega_{Rn} = |N_n|$

Dans le plan N, δ avec des échelles linéaires, les courbes $|\frac{N_n}{\pi}|$ sont des branches d'hyperboles.

- Si γ est nul ,

les courbes se déduisent l'une de l'autre dans une affinité d'axe N , de rapport n^2 (fig.19) .

- Si γn est pas nul,

les courbes ne sont pas affines, mais pour n élevé, sensiblement confondues avec les précédentes .

$$|N_n| \neq \frac{n^2 \pi^2}{2} \left| \delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4} \right|$$

n grand

Stabilité -

Nous avons vu que le système était stable si $\delta^2 + 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi} \right)$ était positif, donc,

quel que soit δ si $1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi}$ est positif.

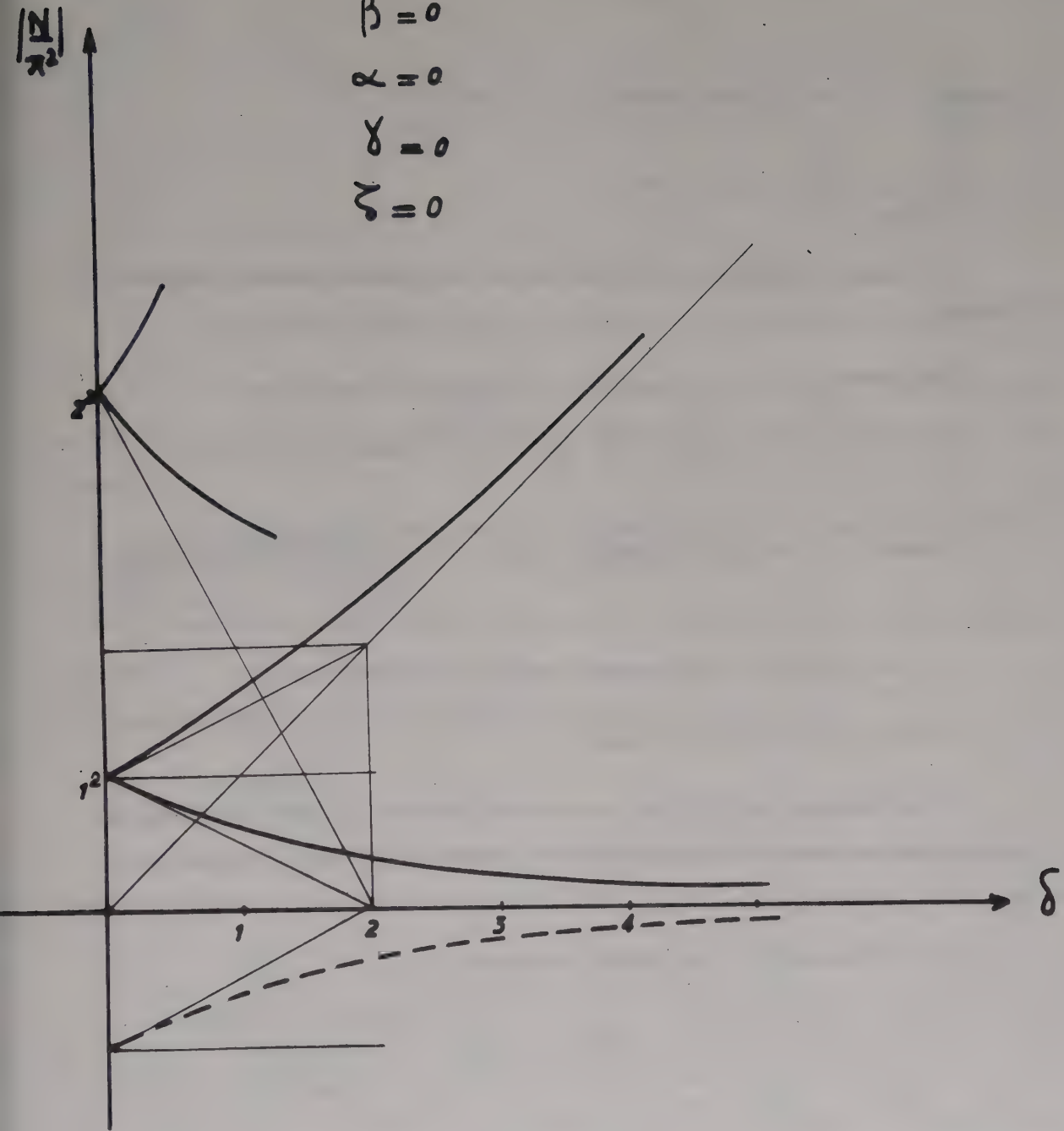
Fig 19

$$\beta = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$\zeta = 0$$



II.3.2.2 - Cas amorti -

$$U_n(\xi, \tau) = e^{-\xi \tau} \sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}} \cdot e^{i \frac{n^2 \pi^2}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}} \right\} \tau} \cdot \sin n \pi \xi$$

$$\text{avec } \begin{cases} Y_n = \delta^2 + 4 \left(1 + \frac{Y}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\xi^2}{n^4 \pi^4} \right) = \delta^2 + B \\ Z_n = \frac{4 \xi \delta}{n^2 \pi^2} = A \delta \end{cases}$$

La rotation de l'arbre provoque le dédoublement des pulsations propres et des termes d'amortissement.

Nous avons :

$$N_n = \frac{n^2 \pi^2}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}} \right\} \text{ avec } \omega_{R_n} = |N_n|$$

$$\text{Posons } \varepsilon_n = M_n = -\xi + M_n^* = -\xi \cdot n^2 \pi^2 \left\{ \pm \frac{Z_n}{4 \sqrt{\frac{Y_n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}}} \right\}$$

ε_n est le coefficient d'amortissement associé à la pulsation d'indice n .

En fait il y a deux pulsations d'indice n .

Nous désignerons par l'indice n_+ les quantités (pulsations ou coefficients d'amortissement) correspondant à la détermination positive devant le radical et par l'indice n_- celles correspondant aux autres déterminations.

Des développements limités simples montrent que :

$A > 0$	$N_{n_+} _{\delta \rightarrow 0} \sim \frac{\delta}{2} n^2 \pi^2 + \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{B} + \dots$ $N_{n_+} _{\delta \rightarrow \infty} \sim \frac{n^2 \pi^2}{2} \delta + \frac{1}{\delta} (\dots) \dots$	$N_{n_-} _{\delta \rightarrow 0} \sim \frac{\delta}{2} n^2 \pi^2 - \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{B} + \dots$ $N_{n_-} _{\delta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$
$B > 0$	$-\varepsilon_{n_+} _{\delta \rightarrow 0} \sim -\xi - \frac{A}{4B} n^2 \pi^2 \delta$ $-\varepsilon_{n_+} _{\delta \rightarrow \infty} \sim -2\xi + \dots$	$-\varepsilon_{n_-} _{\delta \rightarrow 0} \sim -\xi + \frac{A}{4B} n^2 \pi^2 \delta \dots$ $-\varepsilon_{n_-} _{\delta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

$N_{n+} _{\delta \rightarrow 0} \sim \frac{n^2 \pi^2}{2} \delta \left\{ 1 + \frac{A}{\sqrt{-4B}} \right\} \dots$	$N_{n-} _{\delta \rightarrow 0} \sim \frac{n^2 \pi^2}{2} \delta \left\{ 1 - \frac{4}{\sqrt{-4B}} \right\} + \dots$
$N_{n-} _{\delta \rightarrow \infty} \sim n^2 \pi^2 \delta + \frac{1}{\delta} (\dots) \dots$	$N_{n-} _{\delta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$
$A > 0$	
$B < 0$	
$- \varepsilon_{n+} _{\delta \rightarrow 0} \sim - \zeta - \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{-B} \dots$	$- \varepsilon_{n-} _{\delta \rightarrow 0} \sim - \zeta + \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{-B}$
$- \varepsilon_{n+} _{\delta \rightarrow \infty} \sim - 2 \zeta$	$- \varepsilon_{n-} _{\delta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

Ces résultats sont plus significatifs dans le tableau récapitulatif de la page 78.

Les pulsations se classent en deux catégories : les unes $|N_{n+}|$ sont très stables, les autres $|N_{n-}|$ voient leur coefficient d'amortissement associé diminuer à mesure que δ augmente.

Nous avons fait faire les calculs à l'I.B.M. 360-30 de l'E.N.S.M. pour $\zeta = 0,2$ et γ nul. Nous en tirons les conclusions suivantes (figures 19 bis - 20) :

- les ε_{n+} sont indiscernables entre eux (comme les ε_{n-}) au moins pour cette valeur de l'amortissement ζ ,
- les pulsations propres, pour certaines valeurs discrètes de δ , sont égales.

Stabilité -

La solution « n₋ » est stable si son coefficient d'amortissement associé ε_{n-} est positif, la solution « n₊ » étant toujours stable. Cette condition s'exprime par

$$|2\delta^2| < \left| \delta^2 + 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) + \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2} \right|$$

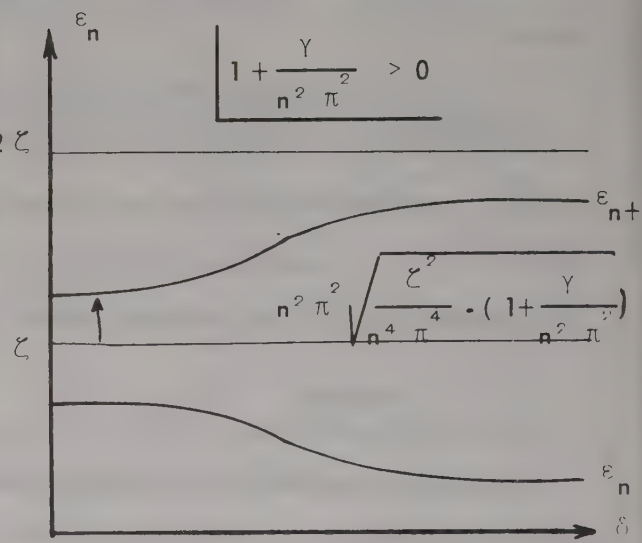
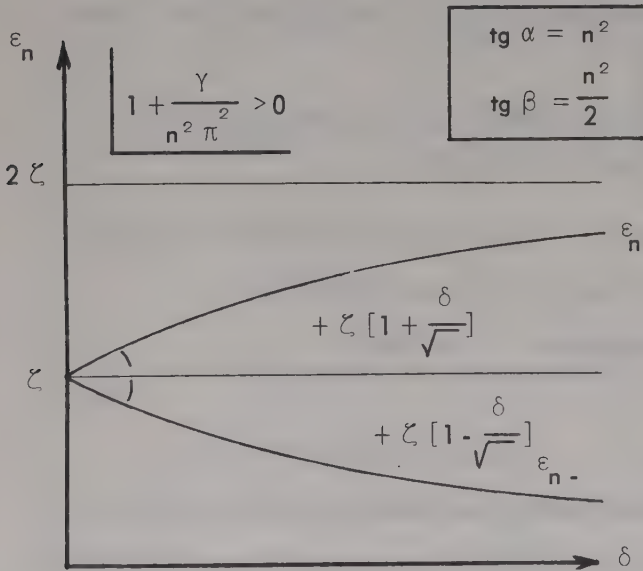
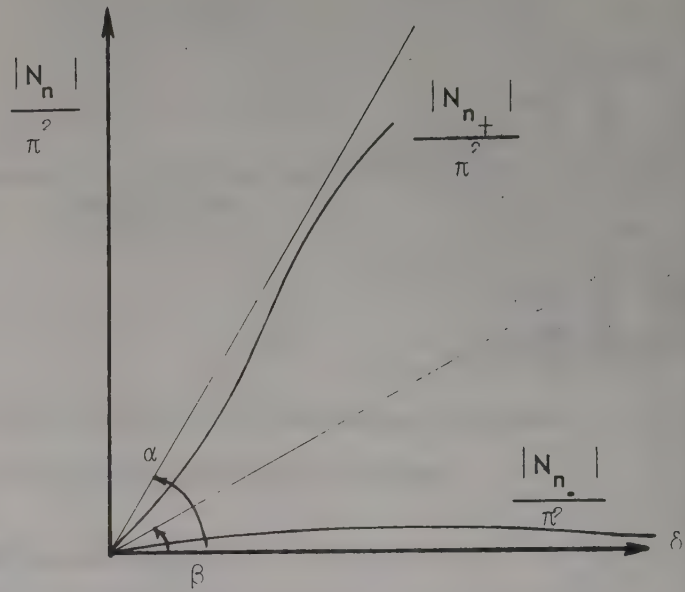
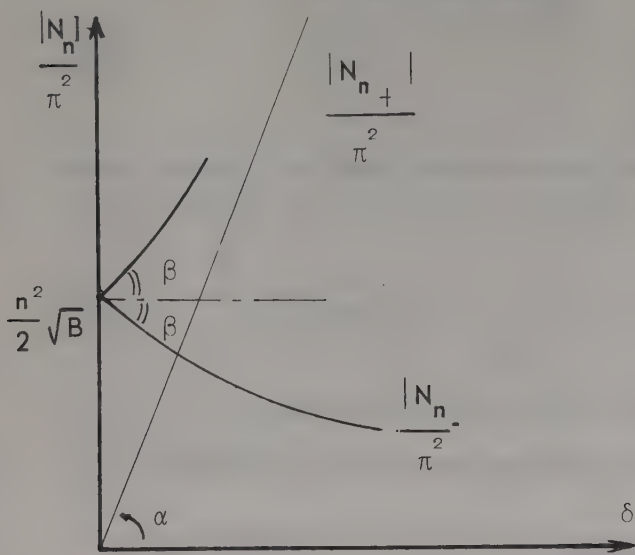
$$\delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) < \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2}$$

— Si $\delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right)$ est négatif, la solution est stable.

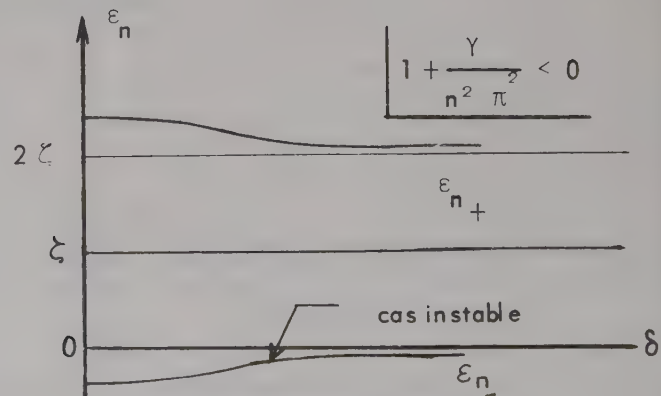
— Si $\delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right)$ est positif, la condition s'écrit finalement :

$$\left[\delta^2 - 4 \left(1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right) \right]^2 < Y^2 + Z^2$$

...tion des pulsations propres et des coefficients d'amortissement en fonction du paramètre de rotation δ et de $B = (1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4}) 4$



$$1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} > 0$$



$$1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} - \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} < 0$$

Fig 19 bis

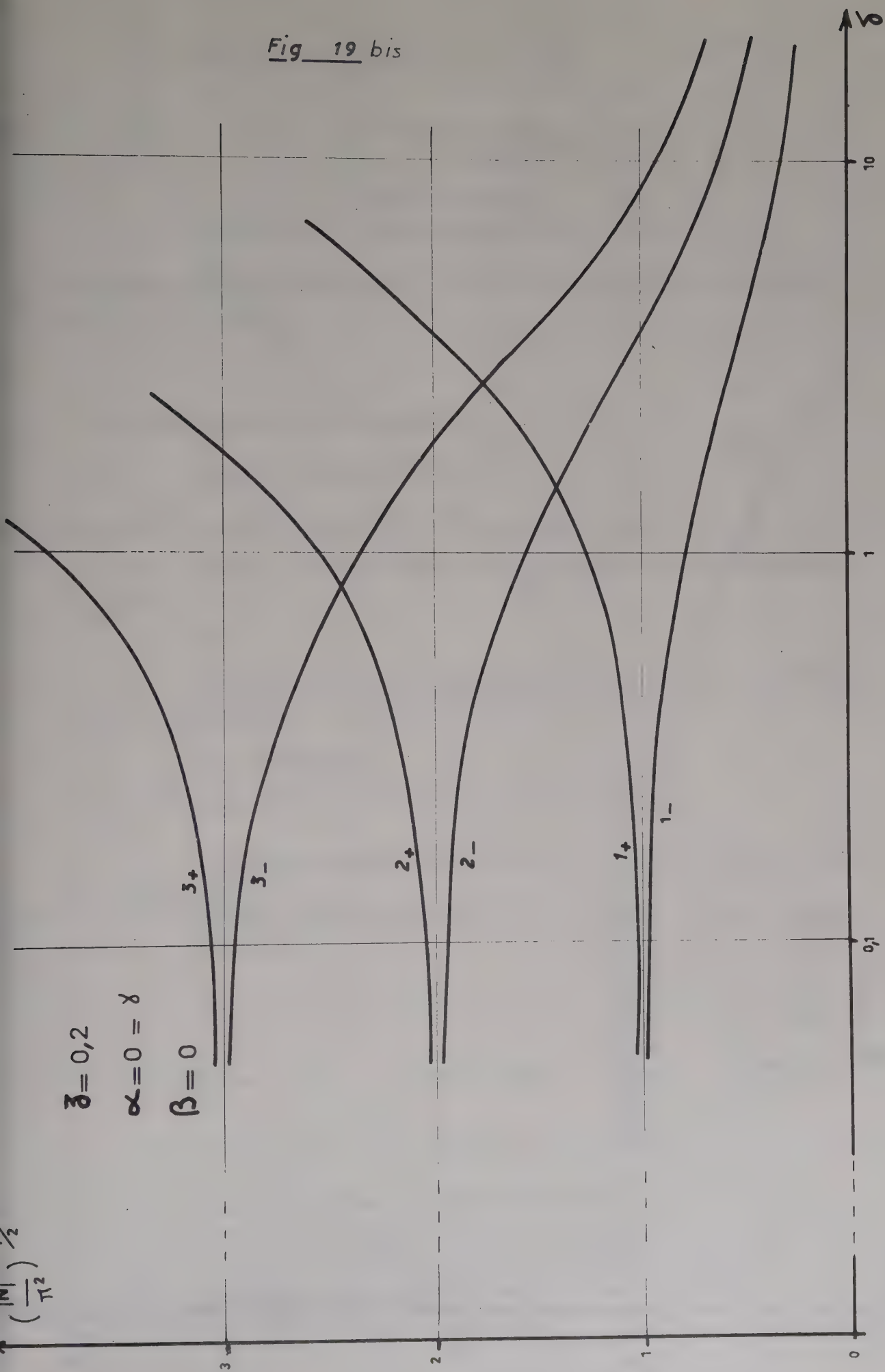
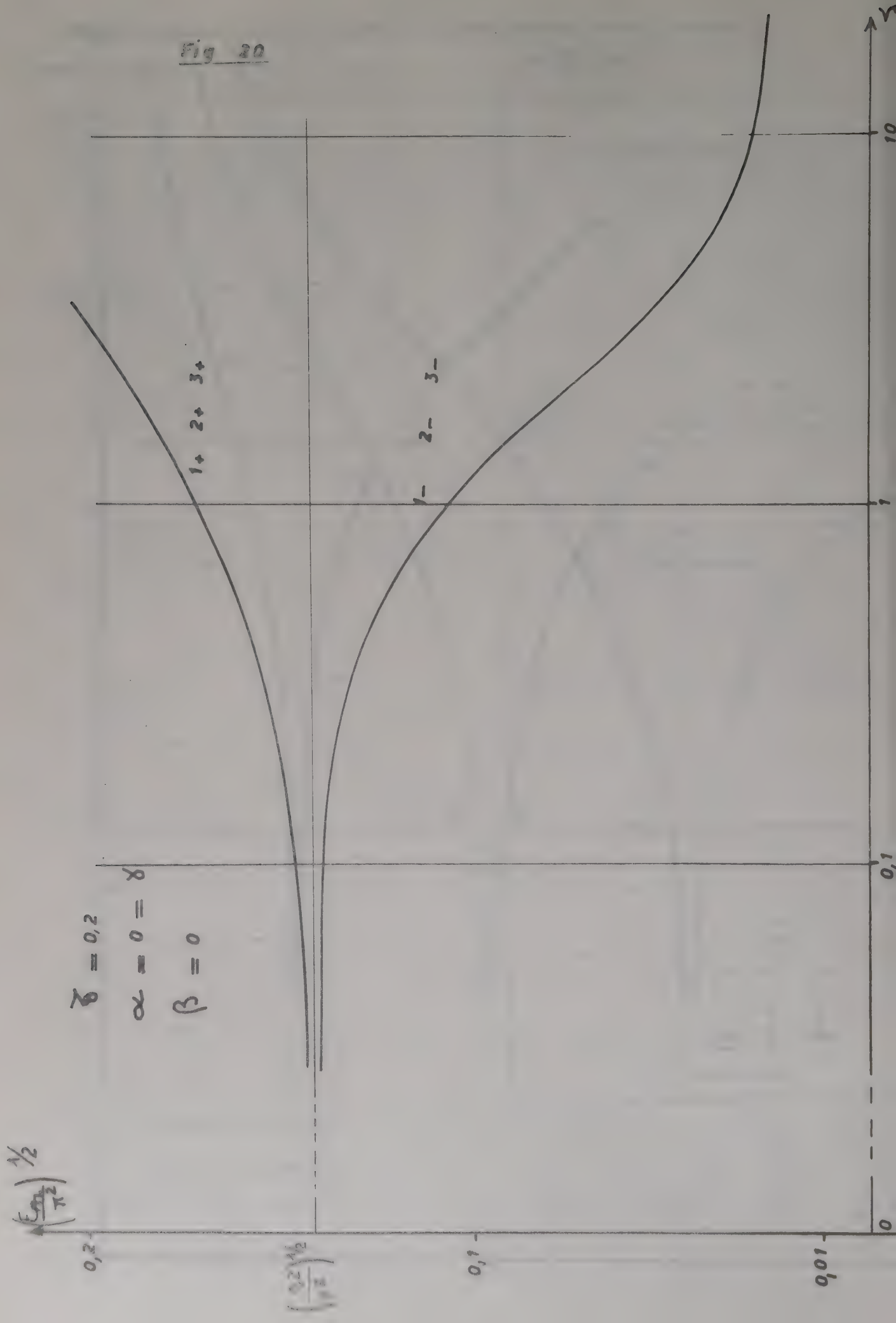


Fig 20



$$\text{Soit } 16 \delta^2 \left[1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} + \frac{\zeta^2}{n^4 \pi^4} \right] < \frac{16 \delta^2 \zeta^2}{n^4 \pi^4}$$

$$1 + \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} > 0$$

Telle est l'unique condition de stabilité en présence d'amortissement.

Cette condition est plus stricte que lorsque ζ est nul, on sait qu'en présence de couplage gyroscopique, l'amortissement déstabilise.

II.4 - Solution approchée dans le cas général -

L'équation aux déplacements s'écrit :

$$(D) = U^{(4)} + i \beta U^{(3)} + \alpha [\xi U^{(1)}]^{(1)} - \gamma U^{(2)} + U'' + 2 \zeta U' + i \delta U^{(2)} = 0$$

cette équation n'étant plus à variables séparables, nous en cherchons des solutions élémentaires de la forme

$$U(\xi, \tau) = V(\xi) e^{\sigma \tau}$$

Les valeurs de $\sigma = M + i N$ permettront de déterminer la pulsation $|N|$ et le coefficient d'amortissement $\varepsilon = -M$ du mode associé $V(\xi)$:

$V(\xi)$ devra satisfaire

$$V^{(4)} + i \beta V^{(3)} + \alpha [\xi V^{(2)}]^{(1)} - \gamma V^{(2)} + [2 \zeta V + i \delta V^{(2)}] \sigma + \sigma^2 V = 0$$

Les conditions géométriques aux limites et les forces d'extrémités étant inchangées nous poserons encore

$$V(\xi) = e^{-i \frac{\beta}{2} \xi} \psi(\xi)$$

$$\text{avec } \psi(\xi) = \sum_{n=1}^p (a_n + i b_n) \sin n \pi \xi$$

Le terme $i \delta V^{(2)} + 2 \zeta V$ devient au facteur $e^{-i \frac{\beta}{2} \xi}$ près

$$i \delta \left(\psi^{(2)} - \frac{\beta^2}{4} \psi \right) + \delta \beta \psi^{(1)} + 2 \zeta \psi = (\mathcal{L}_0 + i \mathcal{L}_1) \psi$$

L'équation en ψ s'écrit, en notations d'opérateurs

$$(L_0 + i L_1) \psi + \sigma (\mathcal{L}_0 + i \mathcal{L}_1) \psi + \sigma^2 \psi = 0$$

Les opérateurs appliqués à la fonction $\sin n \pi \xi$ sont tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(\sin n \pi \xi) = \beta \delta n \pi \cos n \pi \xi + 2 \zeta \sin n \pi \xi \\ \mathcal{L}_1(\sin n \pi \xi) = - \left(\frac{\beta^2}{4} + n^2 \pi^2 \right) \delta \sin n \pi \xi \end{cases}$$

Les conditions d'orthogonalité feront intervenir les termes supplémentaires

$$\sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi \left[a_n (\beta \delta n \pi \cos n \pi \xi + 2 \zeta \sin n \pi \xi) + b_n \delta \left(\frac{\beta^2}{4} + n^2 \pi^2 \right) \sin n \pi \xi \right] d \xi$$

pour $\mathcal{L}_0$

et

$$\sum_{n=1}^p \int_0^1 \sin m \pi \xi \left[- a_n \delta \left(\frac{\beta^2}{4} + n^2 \pi^2 \right) \sin n \pi \xi + b_n (\beta \delta n \pi \cos n \pi \xi + 2 \zeta \sin n \pi \xi) \right] d \xi$$

pour $\mathcal{L}_1$

et l'équation à l'approximation d'ordre p revêt l'écriture matricielle

$$\left[\sigma^2 \frac{I}{2} + \sigma \left\{ \begin{bmatrix} G & | & G_1 \\ \hline -G_1 & | & G \end{bmatrix} + \zeta I \right\} + \begin{bmatrix} K & | & -K_1 \\ \hline K_1 & | & K \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où I désigne la matrice unitaire d'ordre $2p$ et où les matrices G et G_1 dues au couplage gyroscopique et telles que

$$\begin{bmatrix} G & | & G_1 \\ \hline -G_1 & | & G \end{bmatrix}$$

soit une matrice antisymétrique

sont définies ainsi

$$G_{m,m} = 0$$

$$G_{1m,m} = \frac{\delta}{2} \left(\frac{B^2}{4} + m^2 \pi^2 \right)$$

$$G_{m,n} = \frac{2mn \delta \beta}{m^2 - n^2}$$

$$G_{1n+2q+1,n} = 0$$

$$\text{si } m = n + 2q + 1$$

$$G_{m,n} = 0$$

$$G_{1n+2q+2,n} = 0$$

$$\text{si } m = n + 2q + 2$$

Nous notons que β a une contribution importante à l'antisymétrie des matrices G et G_1 .

Les calculs ont été effectués sur l'I.B.M. 360.30 de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes en utilisant un programme dont nous parlerons en Annexe IV avec p égal à quatre.

III - Analyse des résultats théoriques -

Nous avons étudié l'influence de β et α sur les résultats exacts déterminés pour $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ et celle du coefficient ζ sur la stabilité lorsqu'il y a couplage gyroscopique.

Il semble que β et α aient une influence relativement faible sur le dédoublement qui dépend principalement de δ . Ce coefficient inversement proportionnel à la vitesse du son dans le matériau $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ est, en général, faible, si l'arbre est de rayon faible. Mais les résultats théoriques suivants permettent de prévoir l'évolution des pulsations d'un rotor flexible muni de lourds volants en fonction de tous les paramètres ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), problème s'écartant un peu du nôtre, mais que nous avons cru bon d'esquisser en Annexe (Annexe V).

III.1 - Influence du couple sur les pulsations réduites $|N|$ lorsque l'effet de la pesanteur est négligé ($\alpha = 0$), la poutre n'étant soumise à aucune force de compression ou de traction, l'amortissement externe ζ étant nul (figure 21) -

Nous avons tracé en fonction de δ , pour différentes valeurs de β les quantités $\left(\frac{|N|}{\pi}\right)^2$ voisines d'entier si δ et β sont nuls.

Tant que β est inférieur à trois, les pulsations réduites $|N|$ sont très voisines du cas où le couple est nul ; dès que β devient important, les pulsations sont très influencées, en raison inverse de leur ordre n ; ainsi, pour β égal à dix, le système est instable quel que soit δ .

III.2 - Influence des forces de pesanteur et des forces de compression axiales (paramètres α et respectivement) sur les pulsations lorsque le couple appliqué est nul, les forces d'amortissement étant négligées (figures 22, 23, 24, 25, 26) -

Nous avons effectué le calcul pour deux valeurs de δ paramètre proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre

$$\begin{cases} \delta = 0,1 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

ceci dans les quatre cas $\gamma = \alpha$, $\gamma = \frac{3}{4}\alpha$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = 0$

Nous n'avons porté que les quatre premières valeurs de $|N|$ bien que la machine en fournisse évidemment huit doubles dont les plus grandes sont entachées d'erreurs importantes dues à la troncature faite sur $\psi(\xi)$.

Les résultats, lorsque δ est nul, sont aussi portés sur les figures (paramètres γ_R de la première partie).

Toutes les pulsations se dédoublent et encadrent les pulsations réduites γ_R .

Fig 21

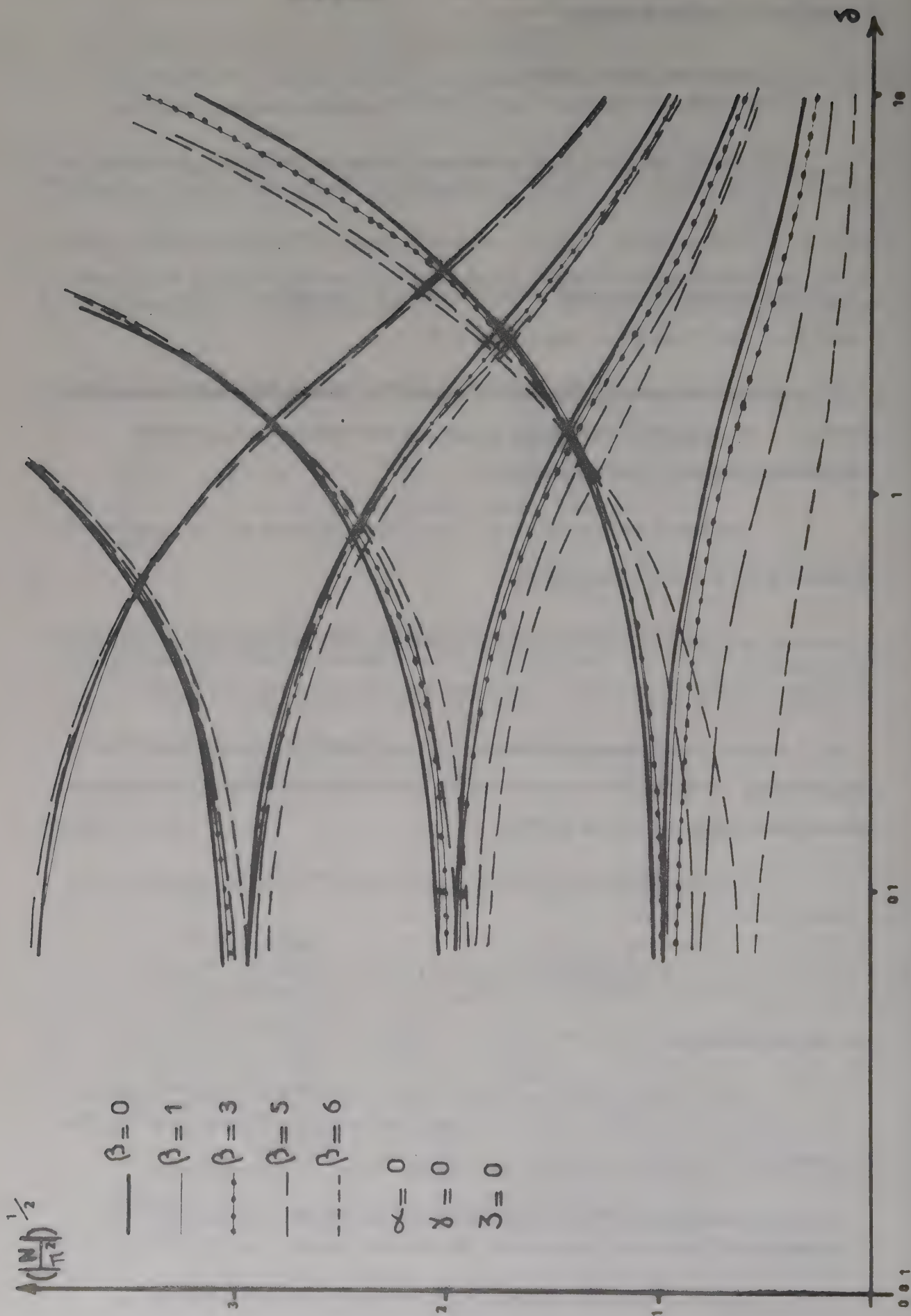
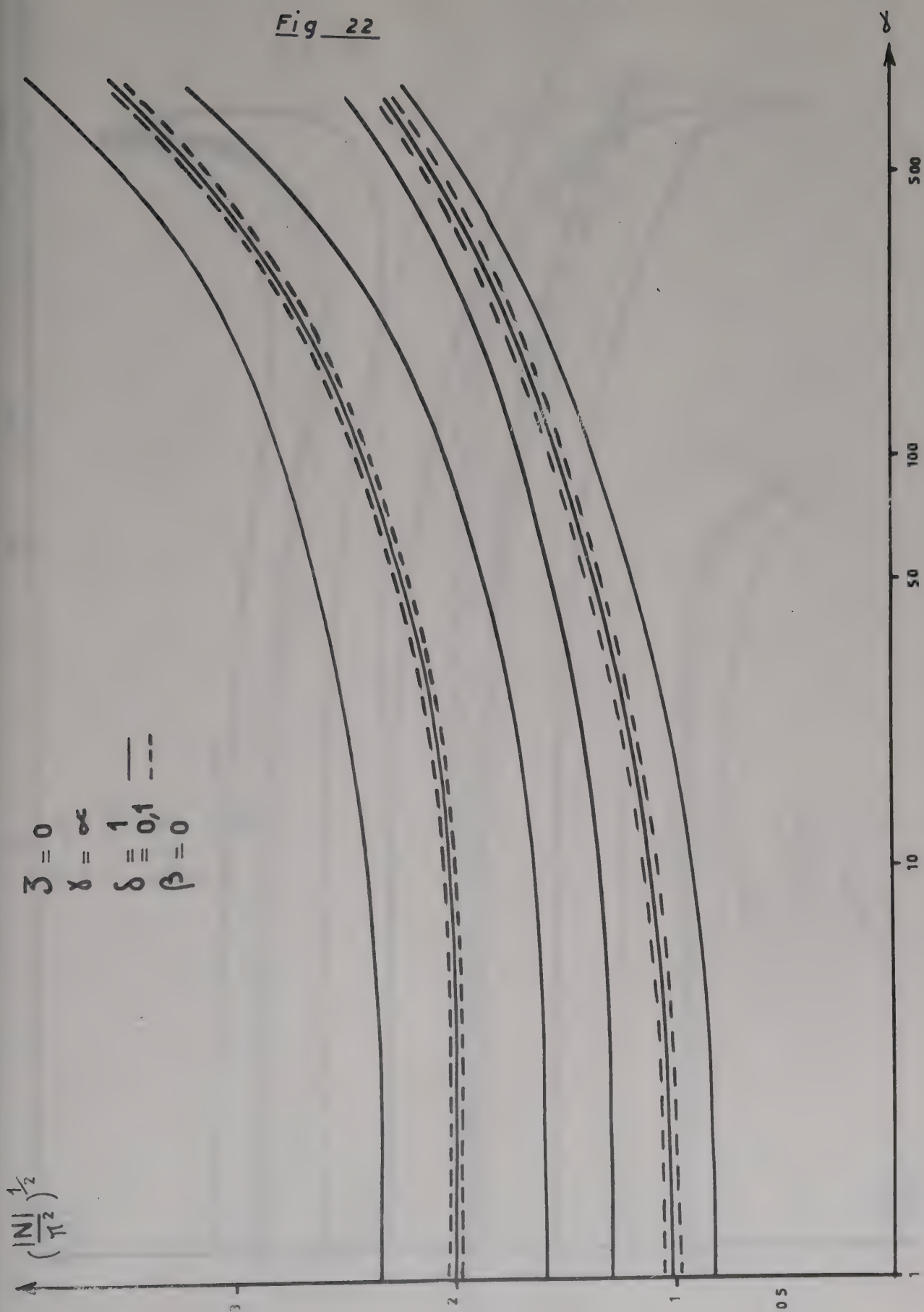


Fig 22



$\left(\frac{|N|}{\gamma}\right)^{1/2}$

$\beta = 0$

$\gamma = \frac{3}{4}\alpha$

$\beta = 0$

$\delta = 1$ —
01 ---

Fig 23

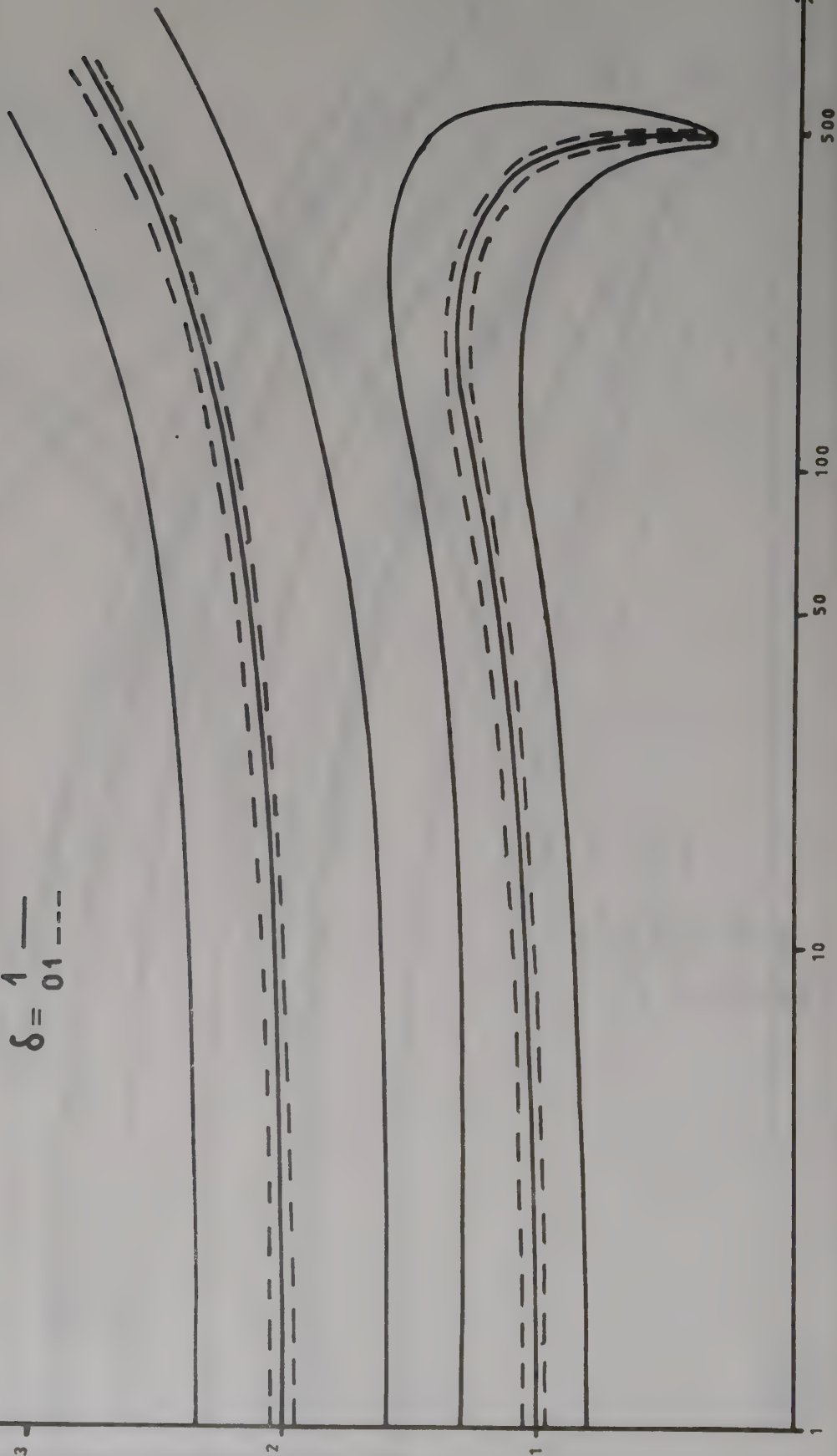


Fig 24

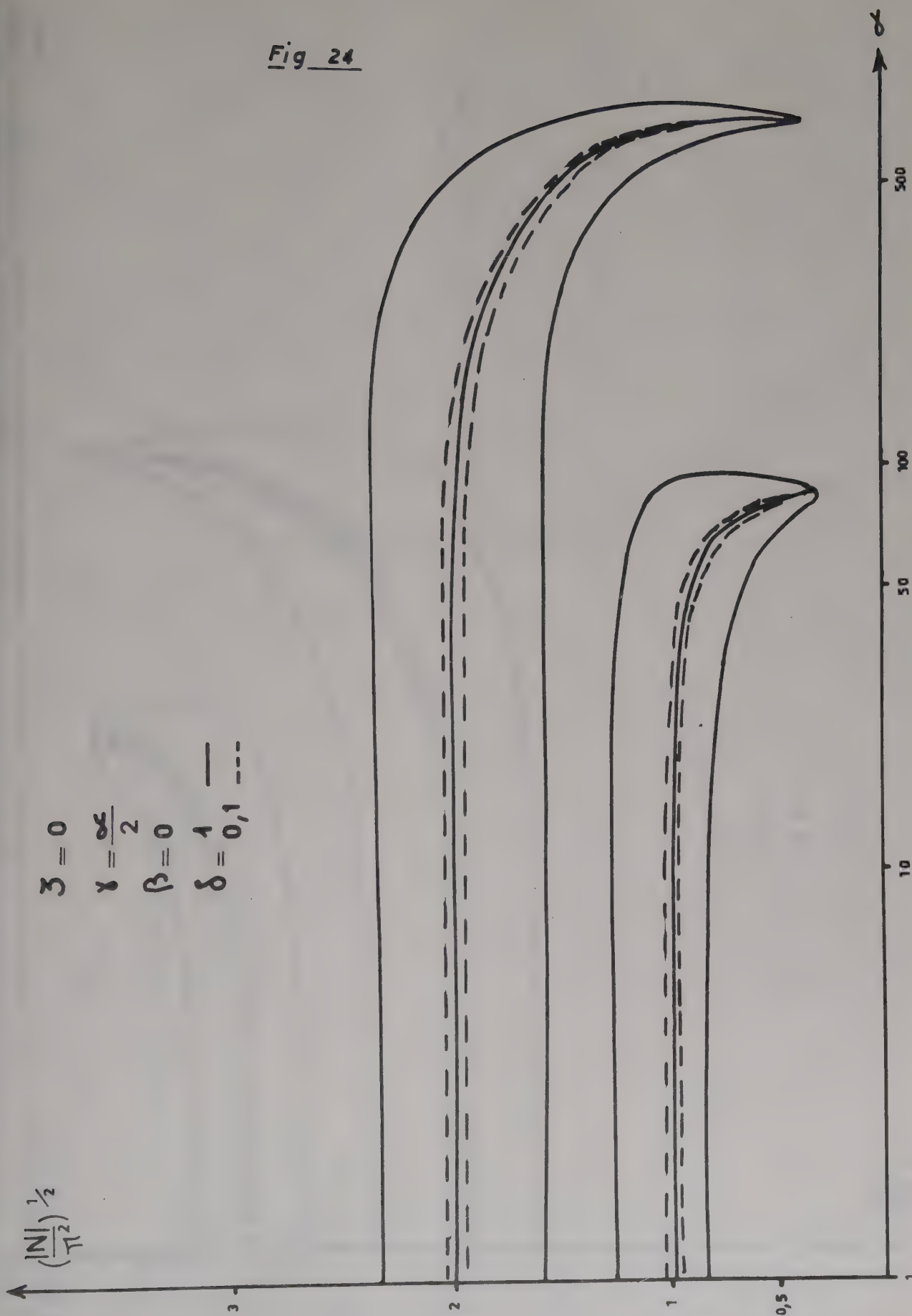


Fig 25

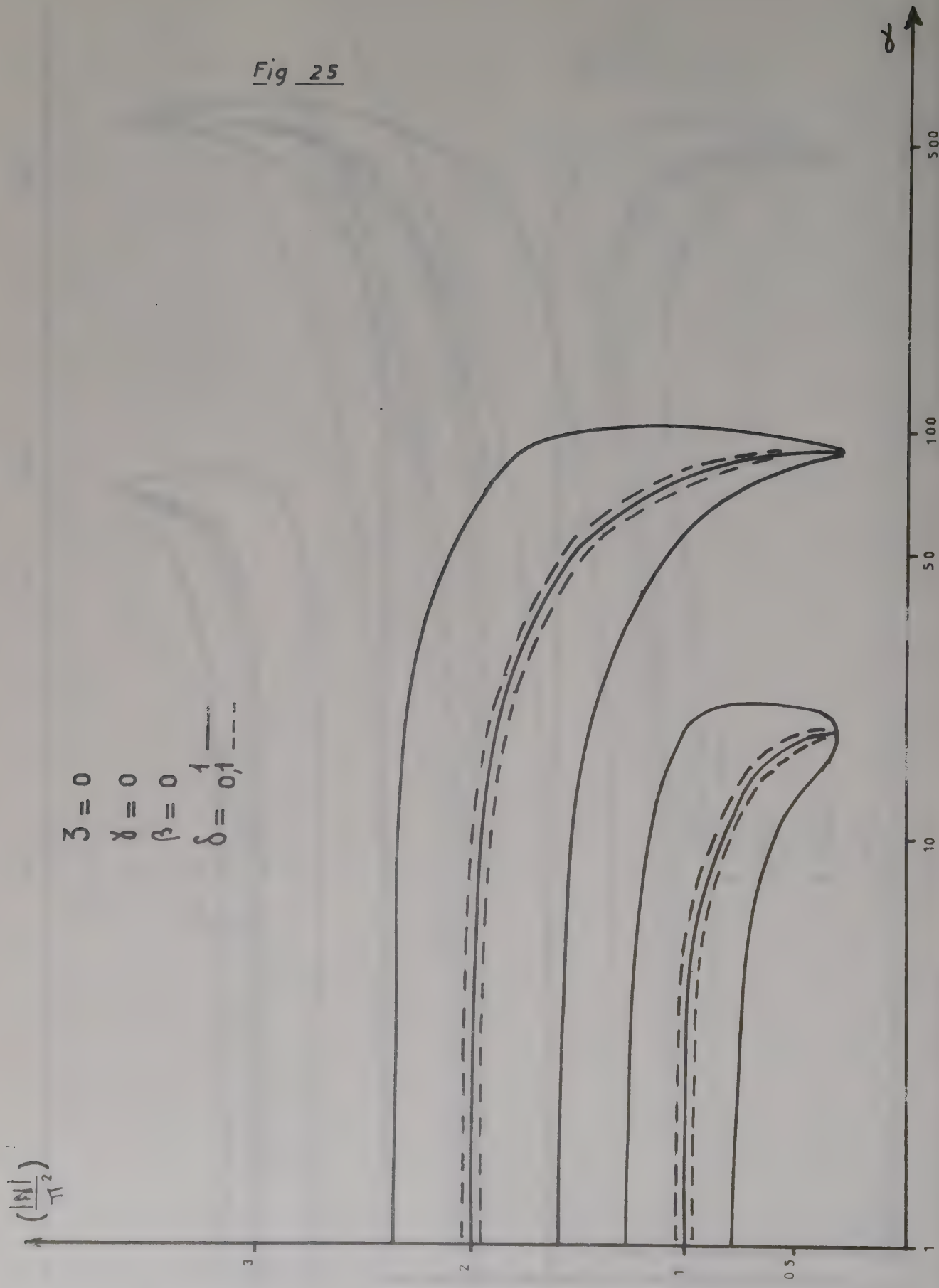
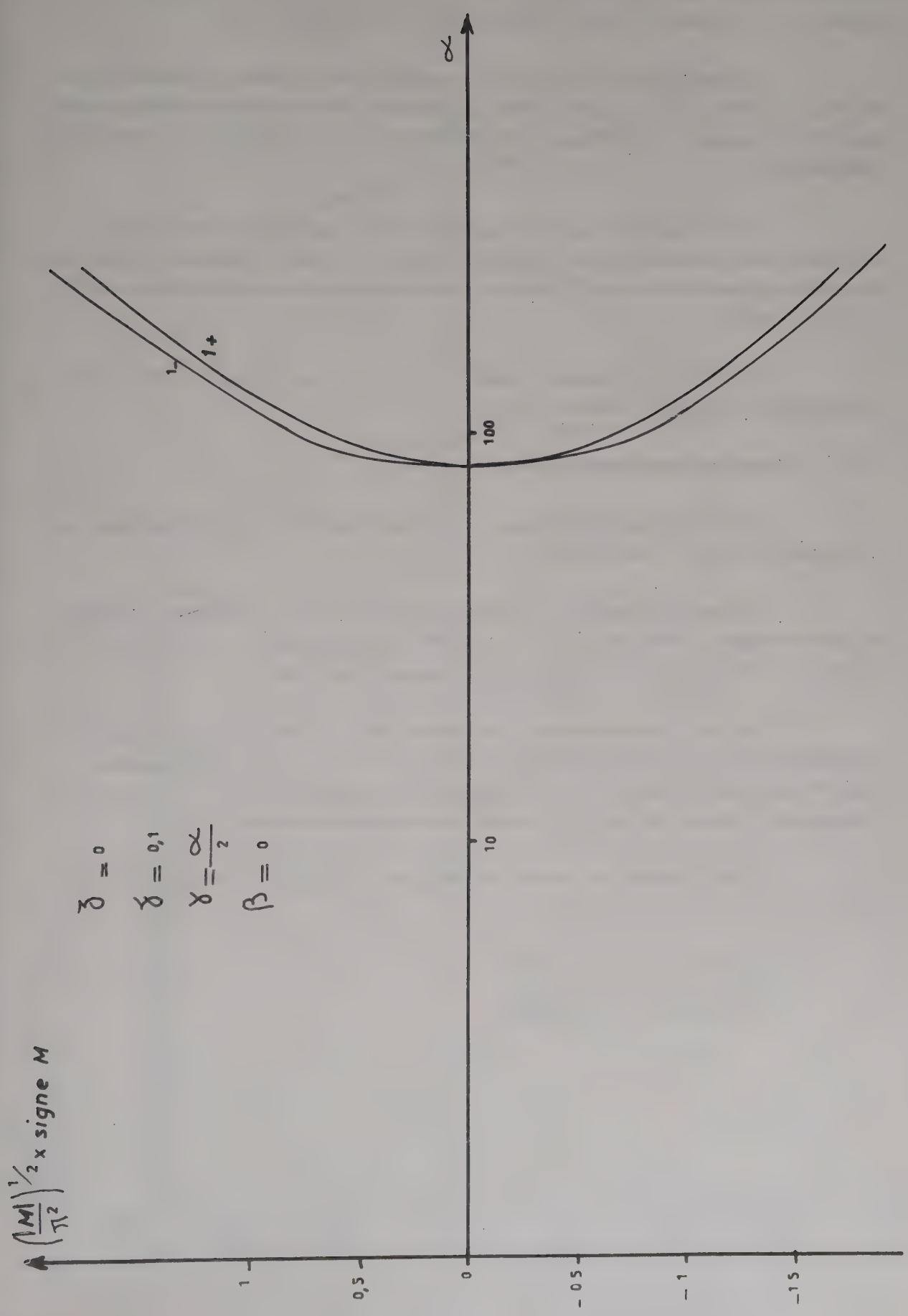


Fig 26



- Si $\gamma = \alpha$ le système est stable
- Si $\gamma < \alpha$ l'instabilité apparaît non par annulation de la pulsation, **mais par confusion de pulsations propres** pour une valeur de α voisine de celle qui donnait lieu au « flambement » tel que nous l'avons caractérisé, mais les instabilités ne sont pas de même nature.

Ce type d'instabilité très particulier a déjà été rencontré dans les vibrations de poutre, ainsi, T.R. BEAL [8] l'a mis en évidence en étudiant la déformation d'un missile cylindrique sous l'effet de la poussée des réacteurs et P.I. SHELUDÉV [12] en déterminant le « flutter » d'une fusée conique.

Si α est supérieur à cette valeur critique, les pulsations deviennent nulles, les coefficients d'amortissements positifs, l'instabilité qui naît est du type « Divergente ». Nous l'avons mis en évidence graphiquement pour la confusion des deux premières pulsations propres lorsque $\gamma = \alpha/2$ (figure 26).

Ce phénomène se reproduit chaque fois qu'il y a confusion, ce qui n'a qu'un intérêt théorique puisque le système est déjà instable.

III.3 - Influence de l'amortissement externe ζ -

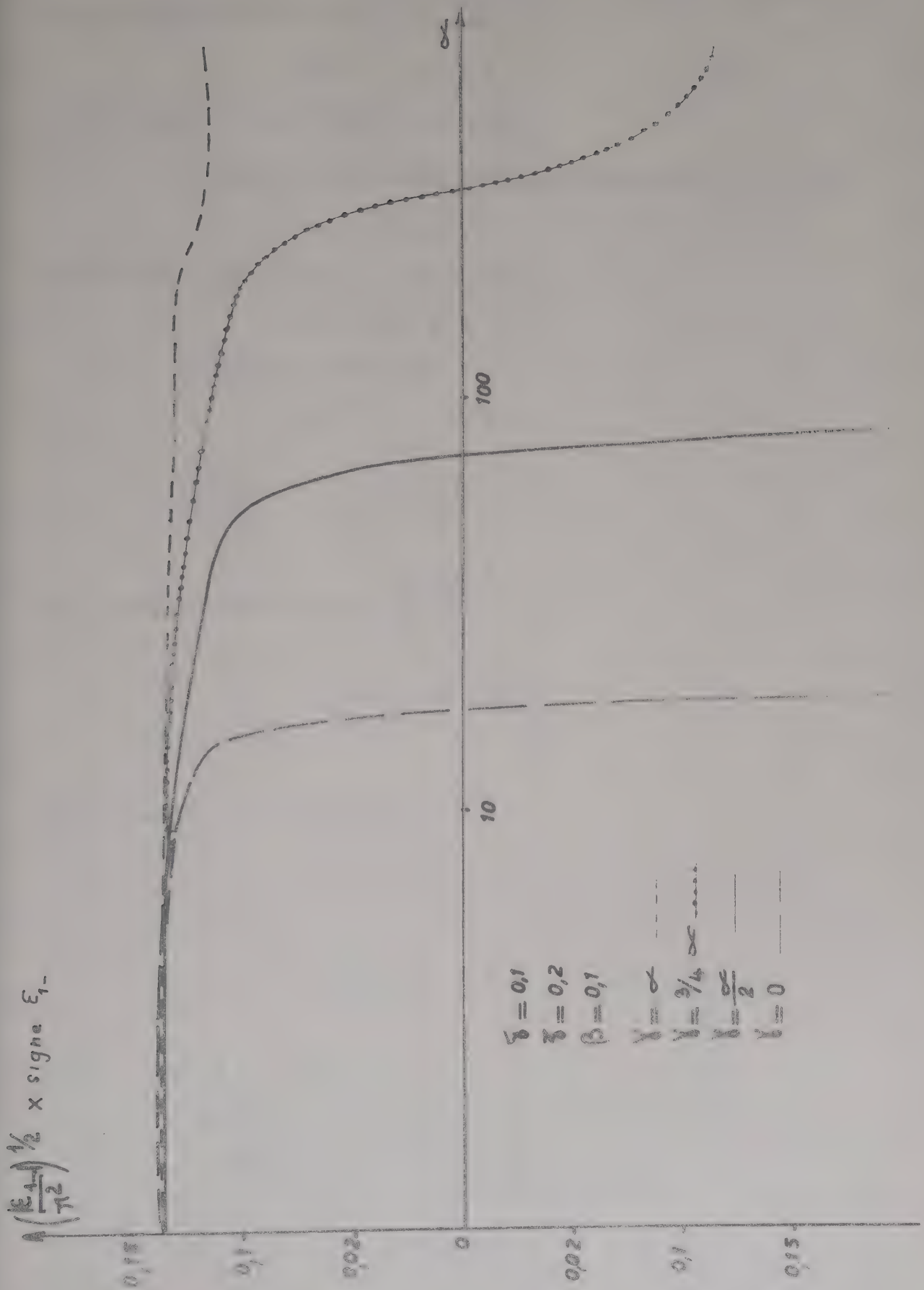
Il est apparu que l'amortissement externe avait un effet sensiblement négligeable sur les pulsations au moins s'il est inférieur à 0,2.

Par contre, les coefficients d'amortissement dédoublés par le couplage gyroscopique sont en nombre égal au nombre de pulsations et d'autant plus séparés que ρ et δ sont élevés, le coefficient relatif à la plus basse pulsation étant toujours le plus faible.

Pour une vitesse de rotation fixée correspondant à une valeur de δ et un rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ bien déterminé, le premier coefficient d'amortissement s'annule pour une valeur de β dépendant de ζ sensiblement égale à celle que l'on pourrait déterminer en supposant δ nul et en utilisant les diagrammes de la première partie de notre exposé (première partie paragraphe III.5).

On peut le vérifier par exemple sur les courbes de la figure 27, tracées dans le cas $\delta = 0,1$; $\zeta = 0,2$; $\beta = 0,1$.

Fig. 22



Annexe IV - Méthode de calcul des valeurs propres -

• Lorsque β, ζ, δ sont nuls, le calcul des valeurs propres est classique, les matrices sont symétriques et l'équation caractéristique est de la forme

$$\det |K - \lambda M| = 0$$

où M est diagonale et proportionnelle à la matrice unité.

• Lorsque β, ζ, δ ne sont pas nuls, l'équation caractéristique est de la forme

$$m\sigma^2 + B\sigma + K = 0$$

équation que nous pouvons associer à l'équation différentielle

$$m\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = 0$$

Soit sous forme canonique avec

$$Z = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \quad Y = \dot{X}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} m & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} 0 & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \right\} Z = 0$$

Soit, après multiplication à gauche par $\begin{bmatrix} m & B \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}$

$$\left\{ -I\sigma + \begin{bmatrix} -m^{-1}B & -m^{-1}K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} Z = 0$$

équation dont l'équation caractéristique est

$$\det |A - I\sigma| = 0$$

avec $A =$

$$\begin{pmatrix} -2 \left\{ \begin{bmatrix} G & G_1 \\ -G_1 & G \end{bmatrix} + \zeta I \right\} & -2 \begin{bmatrix} K & -K_1 \\ K_1 & K \end{bmatrix} \\ \hline & 0 \end{pmatrix}$$

(16, 16)
(p. = 4)

Les valeurs propres sont en général complexes et le principe de calcul est le suivant :

- Transformation de la matrice $\mathcal{A}$ en une matrice semblable de Hessenberg de forme presque triangulaire supérieure, ce calcul est fait à l'aide du sous-programme H S B G selon une méthode due à Wilkinson .
- Calcul des valeurs propres M et N par la méthode du Q R à l'aide du sous-programme A T E I G.
- Détermination des quantités $\left(\frac{|M|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{|N|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ affectées d'un signe convenable.

Le listing est alors celui que nous donnons ici ; la calculatrice lit β, δ, γ (Q S I) , le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ (L) et deux valeurs Q S I I et X K qui ne sont pas utilisées ici et que l'on prendra toujours égales à zéro.

GE 1

JOB

G DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0007	0007	0000

MOB ACTUAL 8K CONFIG 8K

FOR

IST SOURCE PROGRAM

AVE DUBIG1(1246)

DIMENSION AK(4,4),AKK(8,8),AK1(4,4),G(4,4),G1(4,4),GG(8,8),AI(8,8)
1,GR(4,4),GGR(8,8),GR1(4,4),H(4,4),H1(4,4),HH(8,8),A(16,16),
2RR(16),RI(16),IANA(16)

PI=3.14159

LEC=5

IMP=6

506 FORMAT(F9.3)

READ(LEC,1506)BETA

READ(LEC,1506)DELT

READ(LEC,1500)L

READ(LEC,1506)QSI

READ(LEC,1506)QSII

READ(LEC,1506)XK

WRITE(IMP,902)

02 FORMAT('1')

3 READ(LEC,1506)ALP

IF(ALP-9999.)35,35,40

500 FORMAT(I2)

5 IF(L)190,190,195

90 GAM=0.

GO TO 45

95 IF(L-1)2000,2000,205

2000 GAM=ALP/2.

GO TO 45

205 IF(L-2)210,210,215

210 GAM=ALP*3./4.

GO TO 45

215 GAM=ALP

45 WRITE(IMP,900)

900 FORMAT(//)

WRITE(IMP,901)BETA,DELT,GAM,QSI,QSII,XK,ALP

901 FORMAT('0','BETA=',F9.3,3X,'DELTA=',F9.3,3X,'GAMMA=',F9.3,3X,'QSI=
1',F9.3,3X,'QSII=',F9.3,3X,'K=',F9.3,3X,'ALPHA=',F9.3)

DO 5 N=1,4

IP=0

AK(N,N)=((N*PI)**2+BETA**2/4.)*((N*PI)**2-BETA**2/4.+GAM-ALP/2.)

1*0.5

AK1(N,N)=0.

G(N,N)=0.

G1(N,N)=(DELT/2.)*(BETA**2/4.+(N*PI)**2)

GR(N,N)=QSII*((N*PI)**2+BETA**2/4.)

GR1(N,N)=0.

H(N,N)=0.

H1(N,N)=QSII*XK*DELT*((N*PI)**2+BETA**2/4.)

15 M=N+2*IP+1

IF(M-4)8,8,11

8 AK(M,N)=(2.*M*N)/(M**2-N**2)**2*ALP*(M**2+N**2+BETA**2/2./PI**2)

PAGE 2

```

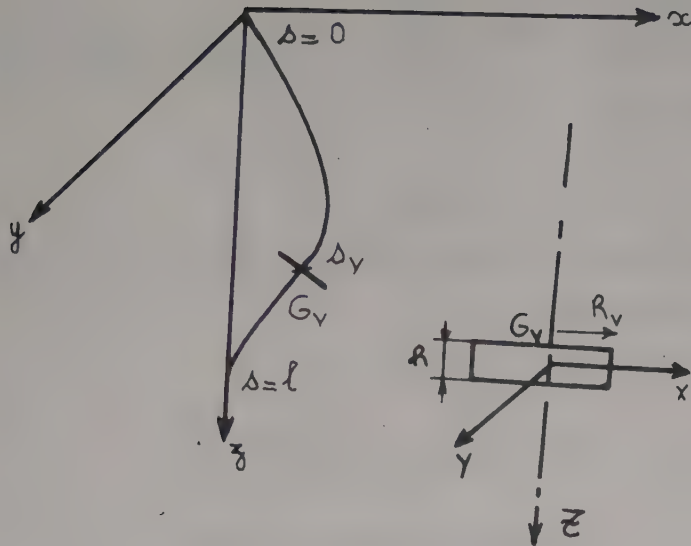
      AK(N,M)=AK(M,N)
      AK1(M,N)=(2.*BETA*M*N)/(M**2-N**2)*((N*PI)**2-BETA**2/4.+GAM-
1ALP/2.)
      AK1(N,M)=(2.*BETA*M*N)/(N**2-M**2)*((M*PI)**2-BETA**2/4.+GAM-
1ALP/2.)
      G(M,N)=(2*M*N)/(M**2-N**2)*DELTA*BETA
      G(N,M)=-G(M,N)
      G1(M,N)=0.
      G1(N,M)=0.
      GR(M,N)=0.
      GR(N,M)=0.
      GR1(M,N)=-4.*M*N/(M**2-N**2)*BETA*QSI1
      GR1(N,M)=-GR1(M,N)
      H(M,N)=2.*QSI1*XK*DELTA*BETA*2.*M*N/(M**2-N**2)
      H(N,M)=-H(M,N)
      H1(M,N)=0.
      H1(N,M)=0.
      MM=N+2*IP+2
      IF(MM-4)12,12,11
12  AK(MM,N)=0.
      AK(N,MM)=0.
      AK1(MM,N)=ALP*BETA*M*N/(M**2-N**2)
      AK1(N,MM)=-AK1(MM,N)
      G(MM,N)=0.
      G(N,MM)=0.
      G1(MM,N)=0.
      G1(N,MM)=0.
      GR(M,N)=0.
      GR(N,M)=0.
      GR1(M,N)=0.
      GR1(N,M)=0.
      H(M,N)=0.
      H(N,M)=0.
      H1(M,N)=0.
      H1(N,M)=0.
11  IF(IP-1)10,5,5
10  IP=1
      GO TO 15
5    CONTINUE
      DO 20 M=1,4
      DO 20 N=1,4
      GG(M,N)=G(M,N)
      AKK(M,N)=AK(M,N)
      GGR(M,N)=GR(M,N)
      HH(M,N)=H(M,N)
      MM=M+4
      NN=N+4
      GG(MM,NN)=G(M,N)
      AKK(MM,NN)=AK(M,N)
      GGR(MM,NN)=GR(M,N)
      HH(MM,NN)=H(M,N)
      GG(MM,N)=-G1(M,N)
      AKK(MM,N)=AK1(M,N)
      GGR(MM,N)=-GR1(M,N)
      HH(MM,N)=-H1(M,N)
      GG(M,NN)=G1(M,N)
      GGR(M,NN)=GR1(M,N)

```

PAGE 3

```
      HH(M,NN)=H1(M,N)
20    AKK(M,NN)=-AK1(M,N)
      DO 25 M=1,8
      DO 25 N=1,8
      AI(M,N)=0.
25    AI(N,N)=1.
      DO 50 M=1,8
      DO 50 N=1,8
      A(M,N)=-2.*(GG(M,N)+GGR(M,N)+QSI*AI(M,N))
      MM=M+8
      NN=N+8
      A(MM,NN)=0.
      A(MM,N)=AI(M,N)
50    A(M,NN)=-2.*(AKK(M,N)+HH(M,N))
      CALL HSBG(16,A,16)
      CALL ATEIG(16,A,RR,RI,IANA,16)
      DO 55 I=1,16
      IF(RR(I))70,75,75
70    AMU=-(ABS(RR(I)))*0.5/PI
      GO TO 80
75    AMU=RR(I)*0.5/PI
80    IF(RI(I))85,90,90
85    ANU=-(ABS(RI(I)))*0.5/PI
      GO TO 100
90    ANU=RI(I)*0.5/PI
100   WRITE(IMP,110)AMU,ANU
110   FORMAT('0','MU=',E16.9,5X,'NU=',E16.9)
55    CONTINUE
      GO TO 3
40    STOP
      END
```


Annexe V - Exemple d'utilisation des résultats précédents pour l'étude des pulsations propres d'un rotor flexible muni d'un volant



Comme application des résultats précédents, nous étudions le mouvement d'un rotor flexible muni à l'abscisse $s = s_V$ d'un volant de grand rayon R_V par rapport au rayon de l'arbre R et d'épaisseur négligeable h devant la longueur l de l'arbre.

Nous écrirons les équations générales et nous ferons une application numérique.

Soit $M(s_V)h = M_V$ la masse du volant.

Nous allons considérer l'arbre chargé d'une distribution de masse localisée à l'abscisse s_V en introduisant une fonction $M(s)$ et la fonction de Dirac. La distribution $M(s)$ vérifiera

$$\int_0^l M(s) ds = \int_0^l M(s_V) \delta(s - s_V) ds = M_V$$

De même, nous définissons des moments d'inertie $C(s)$, $D(s)$ par rapport à des axes Z , X , Y , parallèles aux axes fixes, centrés sur la ligne neutre.

$$C(s) = \frac{M(s)}{2} R_V^2 \quad (\text{moment d'inertie par rapport à } G_V Z)$$

$$D(s) = \frac{C(s)}{2} \quad (\text{moment d'inertie par rapport à } G_V X \text{ ou } G_V Y \text{ dans le cas où } R/R_V$$

est très faible),

$$\text{avec } \begin{cases} \int_0^l C(s) ds = \int C_V \delta(s - s_V) ds = C_V \\ M(s_V) = S_V \rho_V h = S_V \rho(s) \end{cases}$$

où S_V désigne la surface du disque de rayon R_V , ρ_V la masse spécifique du volant.

Mise en équations par les théorèmes généraux -

— Mouvement du centre de masse d'un élément de la ligne neutre de longueur ds

$$[\rho S + M(s)] ds \ddot{x} = \frac{\partial F_x}{\partial x} ds - b ds \dot{x} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_m g S z \frac{\partial x}{\partial s}) ds \quad (1)$$

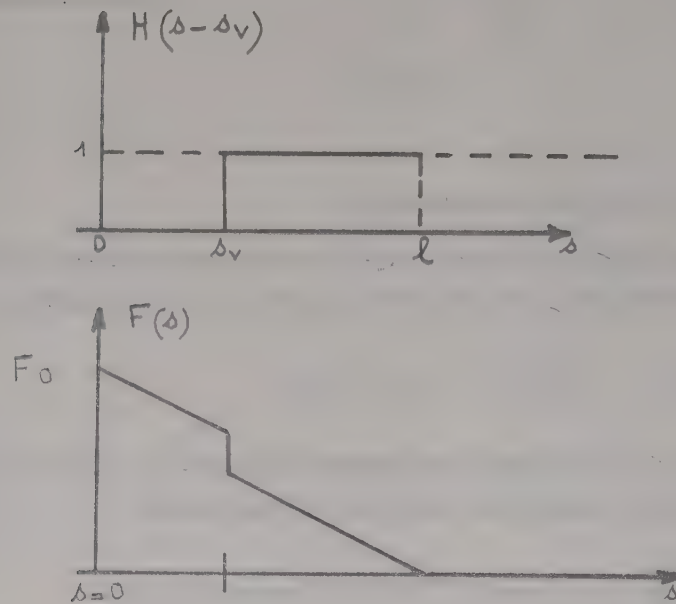
$$[\rho S + M(s)] ds \ddot{y} = \frac{\partial F_y}{\partial y} ds - b ds \dot{y} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho_m g S z \frac{\partial y}{\partial s}) ds \quad (2)$$

$$[\rho S + M(s)] ds \ddot{z} = (\rho - \rho_m) S g ds + \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} M(s) g ds \quad (3)$$

La dernière équation permet d'écrire

$$F(s) = F_0 - \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} M_v g H(s - s_v) - \rho g S s$$

où $H(s - s_v)$ désigne la fonction échelon.



— Equation des moments par rapport au centre de masse d'un élément de la ligne neutre-

Nous supposons que le volant est soumis à des forces de viscosité dues au déplacement de S_v en z .

Le moment de ces forces par rapport au centre de masse du volant est donc :

$$\vec{M}(G_v, F) = - \frac{b}{2R} \int_{S_v} \vec{GP} \wedge \vec{V}_z(P) dS$$

'élément de longueur ds étant soumis le long de l'axe neutre à une force $- b ds \vec{V} [M(s)]$ donc d'intensité $\frac{b}{2R}$ par unité de surface.

$$\text{Ainsi } \vec{M}(G, F) = -\frac{b}{2R} \frac{S_v R_v^2}{4} \left[-\vec{X} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + \vec{Y} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \right] \delta(s - s_v)$$

Ce couple localisé est colinéaire à certaines composantes du moment cinétique.

Les équations de moments sont donc :

$$\frac{b}{2R} \frac{D(s)}{\rho(s)} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + \frac{\partial C_x}{\partial s} + F_z \frac{\partial y}{\partial s} - F_y \frac{\partial x}{\partial s} = \left[\rho \frac{S R^2}{2} + C(s) \right] \omega_A \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \left[\rho \frac{S R^2}{4} + D(s) \right] \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \quad (4)$$

$$-\frac{b}{2R} \frac{D(s)}{\rho(s)} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial C_y}{\partial s} - F_z \frac{\partial x}{\partial s} + F_x \frac{\partial y}{\partial s} = \left[\rho \frac{S R^2}{2} + C(s) \right] \omega_A \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + \left[\rho \frac{S R^2}{4} + D(s) \right] \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial s} + F_y \frac{\partial x}{\partial s} - F_x \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad (6)$$

La dernière relation permet d'écrire :

$$\boxed{C_z = -\Gamma} \quad (\text{sauf pour } s = s_v = z_v) \quad (6)$$

Les autres équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial s} = & \frac{\partial^2 C_x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(F_z \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\rho \frac{S R^2}{2} + C(s) \right] \omega_A \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \right\} + \frac{b}{2R} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{D(s)}{\rho(s)} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\rho \frac{S R^2}{4} + D(s) \right] \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial s} = & -\frac{\partial^2 C_y}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(F_z \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\rho \frac{S R^2}{2} + C(s) \right] \omega_A \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \right\} + \frac{b}{2R} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{D(s)}{\rho(s)} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\rho \frac{S R^2}{4} + D(s) \right] \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Les équations (7) et (8) étant toujours valables

$$\frac{\partial^2 C_y}{\partial s^2} = E I \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} - \Gamma \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 C_x}{\partial s^2} = -E I \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \Gamma \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} \quad (8)$$

Les équations (1) et (2), après division par ds , multiplication par $\frac{l^4}{EI}$ deviennent, en utilisant les équations (5), (4), (7), et (8), et en posant $U = x + i y$

$$\begin{aligned} \frac{\rho S l^4}{EI} \ddot{U} \left[1 + \frac{M(s)}{\rho S} \right] + \frac{b l^4}{EI} \dot{U} + l^4 \frac{\partial^4 U}{\partial s^4} + i \frac{l \Gamma}{EI} l^3 \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} + \\ - l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{l^2 F(s)}{EI} l \frac{\partial U}{\partial s} + \rho m \frac{g S l^3}{EI} s \frac{\partial U}{\partial s} \right] \\ + i \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\rho \frac{S R^2}{2} \frac{l^2}{EI} + C(s) \frac{l^2}{EI} \right) \omega_A \frac{l \partial^2 U}{\partial s \partial t} \right] + \\ - l \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\rho \frac{S R^2}{4} + D(s) \right) \frac{l^2}{EI} \frac{\partial^3 U}{\partial s \partial t^2} \right] + \\ - \frac{b}{2R} l \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{D(s)}{\rho(S)} \frac{l^2}{EI} \frac{l \partial^2 U}{\partial s \partial t} \right] = 0 \end{aligned}$$

Soit, avec les variables sans dimension utilisées précédemment, avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^l M(s) ds &= \int_0^1 M(\xi l) l d\xi = \int_0^1 \delta(\xi - \xi_v) M(\xi) l d\xi = M_v \\ \int_0^1 \delta(\xi - \xi_v) d\xi &= 1 ; \quad M(s) = \frac{M(\xi)}{l} ; \quad C(s) = \frac{C(\xi)}{l} ; \quad \rho(s) = \frac{M(\xi)}{l s} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} U'' \left[1 + \frac{M(\xi)}{\rho S l} \right] + 2 \zeta U' + U^{(4)} + i \beta U^{(3)} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\xi) \frac{l^2}{EI} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \rho m \frac{g S l^3}{EI} \frac{\xi \partial U}{\partial \xi} \right] + \\ + i \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{R^2}{2 l^2} \frac{\omega_A}{\Omega} + \frac{C(\xi)}{\rho S l} \frac{\omega}{l^2 \Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \xi} \right] + \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{R^2}{4 l^2} + \frac{D(\xi)}{\rho S l} l^2 \right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2} \right] - \frac{b}{2R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{D(\xi)}{l \rho(s)} \cdot \frac{1}{l^2} \frac{1}{\rho S \Omega} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{En posant : } \begin{cases} S_0 = 2 R l \\ M_0 = \rho S l \end{cases}$$

nous obtenons :

$$- 2 \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{M(\xi)}{2 R l} \frac{R_v^2}{4 l^2} \frac{S(\xi)}{M(\xi)} U^{(1)'} \right] = - 2 \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{R_v^2}{4 l^2} \frac{M(\xi)}{\rho(s) S_0} U^{(1)'} \right)$$

Comme expression du dernier terme et comme expression du cinquième terme :

$$- \frac{U}{l^2} \left(\frac{F_0 l}{EI} + (\rho_m - \rho) \frac{g S l^3}{EI} \right) - \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{M g l^2}{EI} H(\xi - \xi_v)]$$

$$\text{Soit } + \alpha [\xi U^{(1)}]^{(1)} - \gamma U^{(2)} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} U^{(1)} \frac{M_g \ell^2}{EI} H(\xi - \xi_v) \right]$$

La fonction $H(\xi - \xi_v)$ étant la fonction échelon définie sur la variable ξ .

L'équation aux déplacements (D) s'écrit finalement

$$\begin{aligned} U'' + 2\zeta U' + U^{(4)} + i\beta U^{(3)} + \alpha [\xi U^{(1)}]^{(1)} - \gamma U^{(2)} + i\delta U^{(2)'} - \frac{R^2}{4\ell^2} U^{(2)'} + \\ U'' \frac{M(\xi)}{M_0} + \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} \frac{\rho}{\rho - \rho_m} \alpha \frac{M(\xi)}{M_0} [U^{(1)} H(\xi - \xi_v)]^{(1)} + \\ + i \frac{\omega A}{\Omega} \frac{R_v^2}{2\ell^2} \left[\frac{M(\xi)}{M_0} U^{(1)'} \right]^{(1)} - 2\zeta \left[\frac{M(\xi)}{s_0 \rho(s)} \frac{R_v^2}{4\ell^2} U^{(1)'} \right]^{(1)} - \frac{R_v^2}{4\ell^2} \left[\frac{M(\xi)}{M_0} U^{(1)''} \right]^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (D)$$

Résolution sous forme matricielle -

$$\text{Posons } U = e^{-i \frac{\beta}{2} \xi} \psi(\xi) e^{\sigma \tau}, \text{ l'équation (D) s'écrit}$$

$$\begin{aligned} (L_0 + iL_1) \psi + \sigma [L_0 + iL_1] \psi + \sigma^2 \psi + \sigma^2 \frac{M_v}{M_0} \delta(\xi - \xi_p) \psi \\ + \alpha \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} \frac{\rho}{\rho - \rho_m} \frac{M_v}{M_0} \left[\left\{ H(\xi - \xi_v) \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right\}^{(1)} - i \frac{\beta}{2} H(\xi - \xi_v) \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right] \\ + \sigma i \delta \frac{R_v^2}{R} \left[\left\{ \frac{M(\xi)}{M_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right\}^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \frac{M(\xi)}{M_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right] \\ - \sigma^2 \frac{R_v^2}{4\ell^2} \left[\left\{ \frac{M(\xi)}{M_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right\}^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \frac{M(\xi)}{M_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right] \\ - 2\sigma \zeta \frac{R_v^2}{4\ell^2} \left[\left\{ \frac{M(\xi)}{\rho(s) s_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right\}^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \frac{M(\xi)}{\rho(s) s_0} \left(\psi^{(1)} - i \frac{\beta}{2} \psi \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Nous posons $\psi = \sum a_n \sin n \pi \xi + i b_n \sin n \pi \xi$ et nous utilisons la méthode de Galerkin avec l'approximation d'ordre p , des intégrations par parties étant utilisées pour chaque premier terme des quatre dernières lignes.

Tous calculs faits, il apparaît quatre nouvelles matrices telles que l'équation du mouvement s'écrive :

$$\left[\sigma^2 \left[\frac{1}{2} + \mathcal{M}_v \right] + \sigma \left\{ \begin{bmatrix} G & | & G_1 \\ \hline -G & | & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_v \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} I + Z_v \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} K & | & -K_1 \\ \hline -K_1 & | & K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_v \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec ■
$$M_v = \begin{bmatrix} m_{v_1} & m_{v_2} \\ -m_{v_2} & m_{v_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m_{v_1} = \frac{M_v}{M_0} \left\{ \sin m \pi \xi \sin n \pi \xi \right\}_{\xi=\xi_v} + \frac{R_v^2}{4\ell^2} \left(mn \pi^2 \cos n \pi \xi \cos m \pi \xi + \frac{\beta^2}{4} \sin n \pi \xi \sin m \pi \xi \right) \Big|_{\xi=\xi_v} \\ m_{v_2} = \frac{M_v}{M_0} \left\{ \frac{R_v^2}{4\ell^2} \frac{\beta}{2} (m \pi \sin n \pi \xi \cos m \pi \xi - n \pi \sin m \pi \xi \cos n \pi \xi) \right\}_{\xi=\xi_v} \end{cases}$$

■
$$G_v = \begin{bmatrix} G_{v_1} & G_{v_2} \\ -G_{v_2} & G_{v_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} G_{v_1 m,n} = \frac{M_v}{M_0} \delta \frac{R_v^2}{R^2} \left\{ -\frac{\beta}{2} (m \pi \sin n \pi \xi \cos m \pi \xi - n \pi \sin m \pi \xi \cos n \pi \xi) \right\}_{\xi=\xi_v} \\ G_{v_2 m,n} = \frac{M_v}{M_0} \delta \frac{R_v^2}{R^2} \left\{ mn \pi^2 \cos m \pi \xi \cos n \pi \xi + \frac{\beta^2}{4} \sin n \pi \xi \sin m \pi \xi \right\}_{\xi=\xi_v} \end{cases}$$

■
$$Z_v = \begin{bmatrix} Z_{v_1} & Z_{v_2} \\ -Z_{v_2} & Z_{v_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Z_{v_1 m,n} = \frac{S_v}{S_0} \cdot \frac{2 R_v^2}{4\ell^2} \left\{ mn \pi^2 \cos m \pi \xi \cos n \pi \xi + \frac{\beta^2}{4} \sin n \pi \xi \sin m \pi \xi \right\}_{\xi=\xi_v} \\ Z_{v_2 m,n} = \frac{S_v}{S_0} \frac{2 R_v^2}{4\ell^2} \left\{ \frac{\beta}{2} (m \pi \sin n \pi \xi \cos m \pi \xi - n \pi \sin m \pi \xi \cos n \pi \xi) \right\}_{\xi=\xi_v} \end{cases}$$

■
$$K_v = \begin{bmatrix} K_{v_1} & K_{v_2} \\ -K_{v_2} & K_{v_1} \end{bmatrix}$$

$$K_{v_1 m,n} = \alpha \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} \frac{\rho}{\rho - \rho_m} \frac{M_v}{M_0} \times (-1) \times \int_0^1 H(\xi - \xi_v) \left(mn \pi^2 \cos m \pi \xi \cos n \pi \xi + \frac{\beta^2}{4} \sin m \pi \xi \sin n \pi \xi \right) d\xi$$

$$K_{v_2 m,n} = \alpha \frac{\rho_v - \rho_m}{\rho_v} \frac{\rho}{\rho - \rho_m} \frac{M_v}{M_0} \frac{\beta}{2} \times (-1) \times \int_0^1 H(\xi - \xi_v) (m \pi \sin n \pi \xi \cos m \pi \xi - n \pi \cos n \pi \xi \sin m \pi \xi) d\xi$$

Dans toutes ces matrices, le couple β crée un couplage antisymétrique.

Etude d'un arbre flexible muni d'un lourd volant en son milieu -

Les calculs précédents permettent de déterminer les pulsations propres d'un arbre flexible muni de volants d'épaisseurs faibles vis-à-vis de la longueur de l'arbre et de grand rayon par rapport à celui de l'arbre.

A titre d'application, nous allons étudier l'effet d'un volant situé au milieu de l'arbre ($\zeta_v = \frac{1}{2}$) dans le cas où $\alpha, \gamma, \beta, \zeta$ sont nuls ou négligeables.

A l'approximation d'ordre quatre, après permutation de certaines lignes et colonnes, nous obtenons les deux équations caractéristiques suivantes :

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{M_v}{M_0} & -\frac{M_v}{M_0} & 0 & 0 \\ -\frac{M_v}{M_0} & \frac{1}{2} + \frac{M}{M_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{M}{M_0} & -\frac{M}{M_0} \\ 0 & 0 & -\frac{M}{M_0} & \frac{1}{2} + \frac{M}{M_0} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta \pi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta 9 \pi^2}{2} \\ -\frac{\delta \pi^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta 9 \pi^2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(9 \pi)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\pi)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(9 \pi)^2}{2} \end{bmatrix} = 0$$

pour les déformées d'ordre 1 et 3 (1-, 1+; 3-, 3+)

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 4 \pi^2 I_D & -8 \pi^2 I_D & 0 & 0 \\ -8 \pi^2 I_D & \frac{1}{2} + 16 \pi^2 I_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + 4 \pi^2 I_D & -8 \pi^2 I_D \\ 0 & 0 & -8 \pi^2 I_D & \frac{1}{2} + 16 \pi^2 I_D \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \pi^2 \delta \left(\frac{1}{2} + \Delta\right) & -8 \pi^2 \delta \Delta \\ 0 & 0 & -8 \pi^2 \delta \Delta & 16 \pi^2 \delta \left(\frac{1}{2} + \Delta\right) \\ -4 \pi^2 \delta \left(\frac{1}{2} + \Delta\right) & 8 \pi^2 \delta \Delta & 0 & 0 \\ 8 \pi^2 \delta \Delta & -16 \pi^2 \delta \left(\frac{1}{2} + \Delta\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{(4 \pi)^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(16 \pi)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(4 \pi)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(16 \pi)^2}{2} \end{bmatrix} = 0$$

avec $I_D = \frac{M_v}{M_0} \left(\frac{R_v}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$ et $\Delta = \frac{M_v}{M_0} \left(\frac{R_v}{R}\right)^2$

pour les déformées d'ordre 2 et 4 (2-, 2+; 4-, 4+)

Le milieu de l'arbre est un noeud de vibrations pour les déformées d'ordre pair (2, 4, ...) et le couplage gyroscopique dû au volant se manifeste par l'intermédiaire du nouveau coefficient Δ .

Résultats numériques -

Les calculs ont été effectués pour

$$\frac{M_v}{M_0} = 1 \quad \frac{R_v}{\ell} = \frac{1}{20} \quad \frac{R}{\ell} = \frac{1}{400}$$

Donc $\Delta = 400$ et $I_D = \frac{1}{1600}$

Les quantités σ sont imaginaires, la détermination des pulsations réduites nécessite l'inversion des matrices M , ce qui complique légèrement le calcul.

Les résultats sont portés sur les pages suivantes ; on peut les commenter ainsi :

— $0 \leq \delta \leq 0,01$

Les pulsations d'ordre impair (1,3) sont diminuées et écartées par le couplage massique ou d'inertie, chacune est théoriquement dédoublée dès que δ n'est pas nul, mais ce dédoublement est pratiquement indiscernable.

Les pulsations d'ordre pair (2,4.....) restent voisines de 4π , 16π , ..., si δ est très faible, mais sont très rapidement dédoublées à cause du couplage gyroscopique dû au volant.

— $\delta \leq 0,01$

Le couplage gyroscopique dû à l'arbre lui-même commence à se manifester en dédoublant les pulsations d'ordre impair, ce dédoublement apparaissant moins rapidement que lorsque l'arbre n'a pas de volant.

Les pulsations se classent toujours en pulsations N_+ croissantes en fonction de δ et N_- décroissantes, il apparaît toujours des pulsations égales pour certaines valeurs discrètes de δ .

Remarque -

Il nous paraît important de rappeler que les pulsations de torsion sont très abaissées par la présence d'un volant.

Ainsi un calcul simple montre que la première pulsation de torsion de la moitié supérieure de l'arbre, volant compris, est donnée sensiblement par la formule :

$$\omega_T = \frac{G I_0}{\ell_2 I_v} = \frac{EI}{\ell^3} \frac{2}{1+\nu} \frac{2\ell^3}{M_v R_v}$$

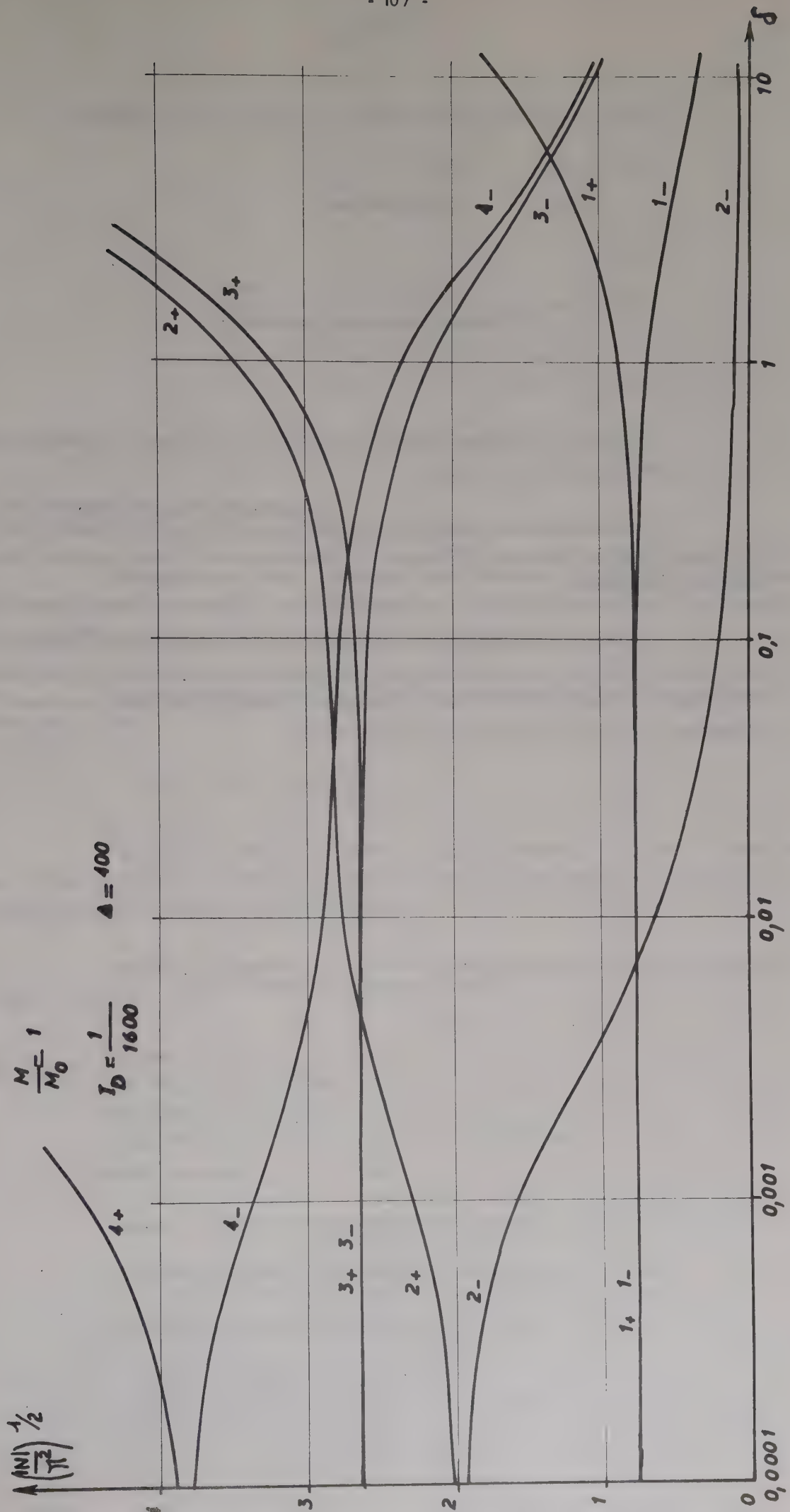
$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$

$\Sigma_V = \frac{1}{2}$

$\frac{M_C}{M_0} = 1$

$I_D = \frac{1}{1600}$

$\Delta = 400$



Mais la première pulsation de flexion, si δ est nul, est sensiblement :

$$\omega_0^2 = \frac{\Omega^2}{2M_v} \pi^4 \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{EI}{M_0 \ell^3}$$

$$1 + \frac{M_0}{M_v}$$

D'où :

$$\Omega_T^2 = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{1+\nu} \cdot 4 \cdot \frac{2}{\pi^4} \left(\frac{\ell}{R_v} \right)^2 \left(1 + \frac{M_0}{2M_v} \right)$$

$$\text{ici } \frac{\ell}{R_v} = 20 \text{ et } \omega_T = 6,25 \omega_0 \text{ pour } \nu = 0,3.$$

Une de nos hypothèses de départ n'est plus vérifiée puisque cette pulsation est voisine de la seconde pulsation de flexion.

La contribution du paramètre de torsion n'est peut être pas négligeable et nous pensons que l'étude des effets secondaires (Influence de la déformation due à l'effort tranchant) devrait se faire en en tenant compte.

Le lecteur intéressé pourra se reporter aux récents travaux de R.L. Eshleman et R.A. Eubanks [réf. 14] . Ces auteurs étudient l'influence du terme provenant de l'effort tranchant, sur la première pulsation propre de flexion. La mise en équation est intéressante et pourrait être partiellement utilisée (le temps réduit n'est pas le même) .



Troisième partie

VERIFICATION EXPERIMENTALE

I - Description du dispositif expérimental -

L'étude que nous avons faite a montré que l'écart entre les pulsations de résonance d'un arbre comprimé et soumis à un couple de torsion et celles d'un arbre sur lequel ne s'exercent pas ces contraintes, était d'autant plus grand que le coefficient α était élevé.

Nous nous sommes donc efforcé de faire nos expériences sur une maquette ayant un coefficient α élevé.

$$\text{Or } \alpha = (\rho - \rho_m) g S \ell \cdot \frac{\ell^2}{EI}$$

Pour avoir un coefficient EI faible et un poids apparent $(\rho - \rho_m) g A \ell$ élevé, nous avons utilisé un tube mince en plastique et rempli de mercure pour augmenter la masse spécifique correspondant à une inertie I et une section S fixée.

Les caractéristiques du tube de matière plastique de rayon intérieur R_1 , extérieur R_2 , étaient les suivantes :

longueur $\ell = 2,51 \text{ m}$

rayon intérieur $R_1 = 6,6 \text{ mm}$

rayon extérieur $R_2 = 8 \text{ mm}$

module d'Young $E = 300 \text{ Kg/mm}^2 = 3 \cdot 10^8 \cdot 9,81 \text{ N/m}^2$

masse volumique $\rho_p = 1,2 \text{ g/cm}^3$

la masse volumique du mercure étant de $13,6 \text{ g/cm}^3$

Les expériences étaient faites dans l'air sans faire tourner le tube.

Ces données permettent de calculer ρ , ρ_m , I et α .

$$\rho = \frac{\rho_{Hg} \frac{R_1^2}{2} + (R_2^2 - R_1^2) \rho_p}{R_2^2} = 9,55 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_m = 0$$

$$S = \pi R_2^2$$

$$I = \frac{\pi}{4} (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2) = 1,725 \cdot 10^{-11} \text{ Kg m}$$

$$\alpha = 58,6$$

- Le tube est monté sur cardan à l'extrémité supérieure où aucune rotation autour de la verticale n'est possible.

A l'extrémité inférieure, le tube est monté sur un roulement à billes, autorisant les déformations angulaires, et dont la couronne extérieure est solidaire d'un fléau de balance.

La force de compression est exercée en bas de tige par l'intermédiaire d'un dispositif du type balance soigneusement étalonné.

Le couple Γ est exercé par l'intermédiaire d'une poulie en matière plastique dure de masse négligeable fixée à l'extrémité inférieure de la tige et sur laquelle deux câbles exercent des forces tangentielles égales, transmises par un dispositif de poulies et dues au chargement d'un plateau.

Les câbles de traction peuvent être bloqués à volonté pour faire des essais à couple constant sans que le chargement perturbe l'énergie cinétique et joue le rôle d'un paramètre caché.

- La relation $F_0 = P - F_C$ se traduit par

$$\gamma = \alpha - F_e \frac{l^2}{EI} \quad \text{avec} \quad \frac{l^2}{EI} = 1,24 \text{ M K S A}$$

- La relation $\Gamma = \frac{EI}{l} \beta$ se traduit par

$$\Gamma (\text{m} \times \text{Newton}) = 2,02 \beta$$

Pour des raisons techniques, le couple ne peut dépasser $\beta = 2$, les goupilles de fixation du tube constituant des amorces de rupture par déchirement; aussi, les valeurs théoriques pour $\beta = 2$ ont-elles été calculées par interpolation graphique entre $\beta = 1$ et $\beta = 3$.

II - Résultats expérimentaux -

II.1 - Résultats relatifs aux pulsations propres -

Les pulsations propres ont été mesurées lors d'essais harmoniques à la résonance de phase, le système étant muni aux deux tiers environ de sa longueur de deux bobines de même axe.

La bobine d'excitation est parcourue par un courant proportionnel à la force exercée délivré par un amplificateur continu Prodera commandé par un générateur de tension Solartron.

Le capteur vitesse est constitué par une bobine se déplaçant aussi dans un champ magnétique radial ; la tension délivrée est proportionnelle à la vitesse de déplacement.

La période des oscillations est lue sur un fréquencemètre Rochar.

Puisque $\tau = \Omega t$ $T_{\text{réduit}} = \Omega T_{\text{réel}}$

la pulsation réduite ω_R vaut donc

$$\omega_{\text{réduit}} = \frac{2\pi}{T_{\text{réduit}}} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\rho \frac{A l^4}{EI}} = \frac{24,4}{T}$$

A la « résonance de phase », nous pouvons considérer que la pulsation est la même que celle calculée dans l'hypothèse $\zeta = 0$ et utiliser les valeurs ω_R déterminées dans la première partie comme résonance de phase théorique.

Nous avons finalement fait les mesures pour

$$\gamma = \alpha = 58,6$$

$$\gamma = \frac{3}{4} \alpha = 44$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} = 29,3$$

$$\beta = 0 \quad ; \quad \beta = 0,3 \quad ; \quad \beta = 1 \quad ; \quad \beta = 2$$

Pour $\gamma = 0$, le système est instable dès que α est supérieur à 21, ici $\alpha = 58,6$ et aucune mesure n'a pu être faite; nous avons seulement constaté l'instabilité.

L'ensemble des résultats est résumé sur les courbes suivantes où nous avons porté les pulsations réduites théoriques et expérimentales.

$$\omega_R = f(\beta)$$

$$\omega_R = f(\gamma)$$

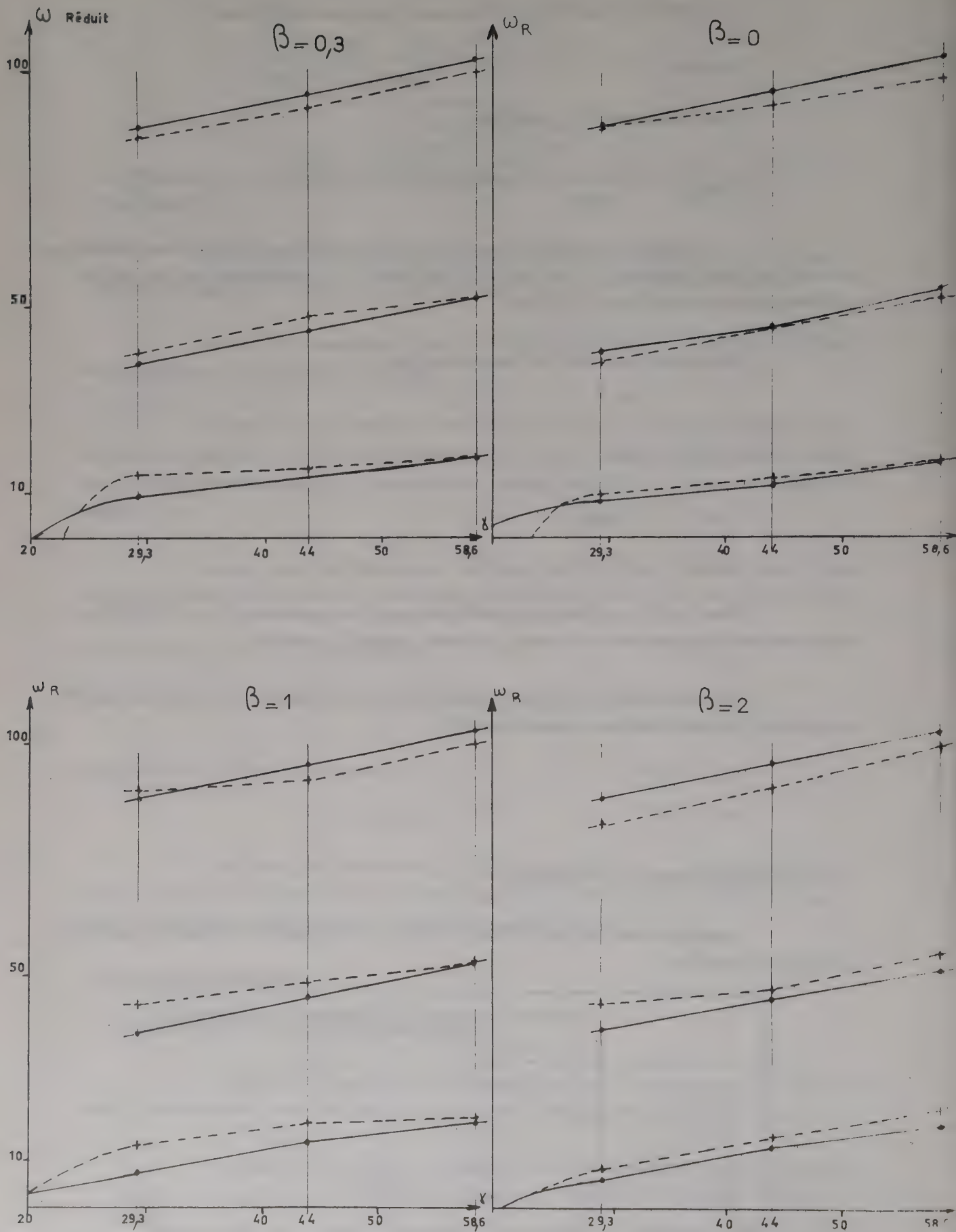
II.2 - Résultats relatifs au « flambement » -

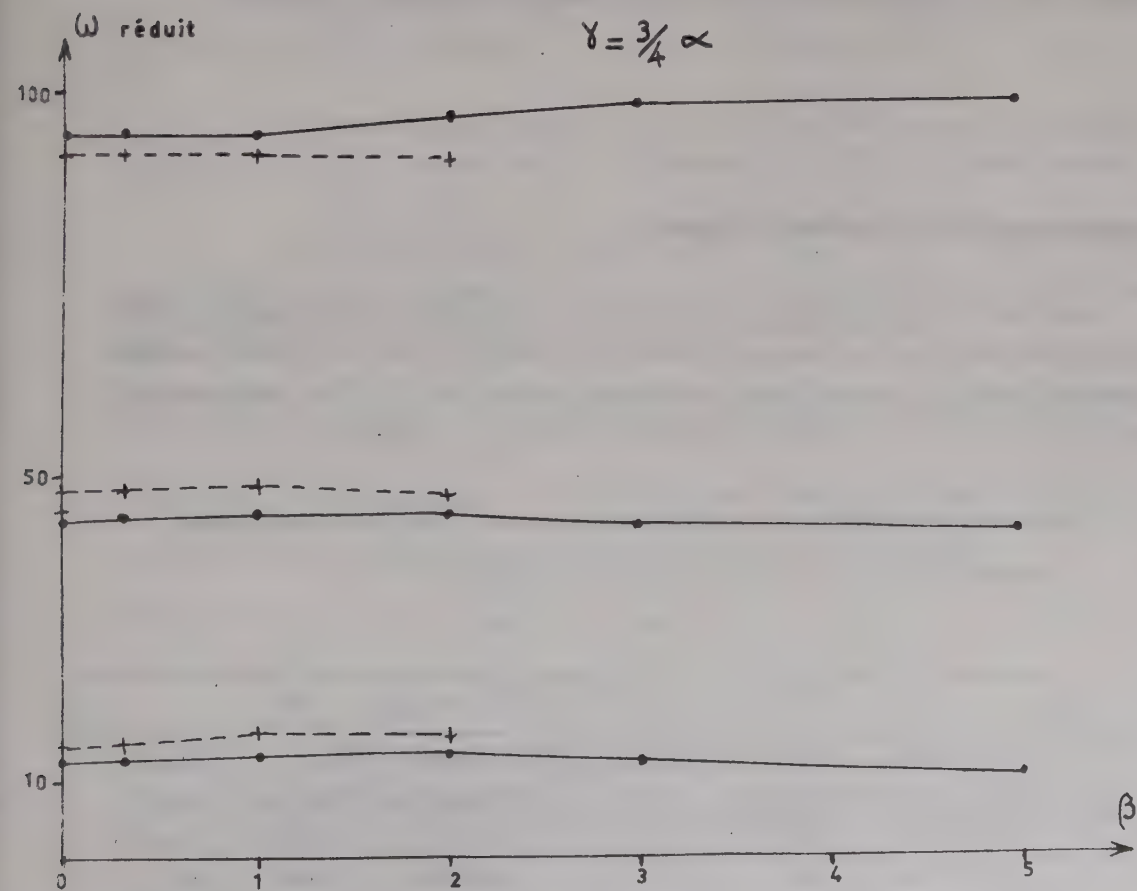
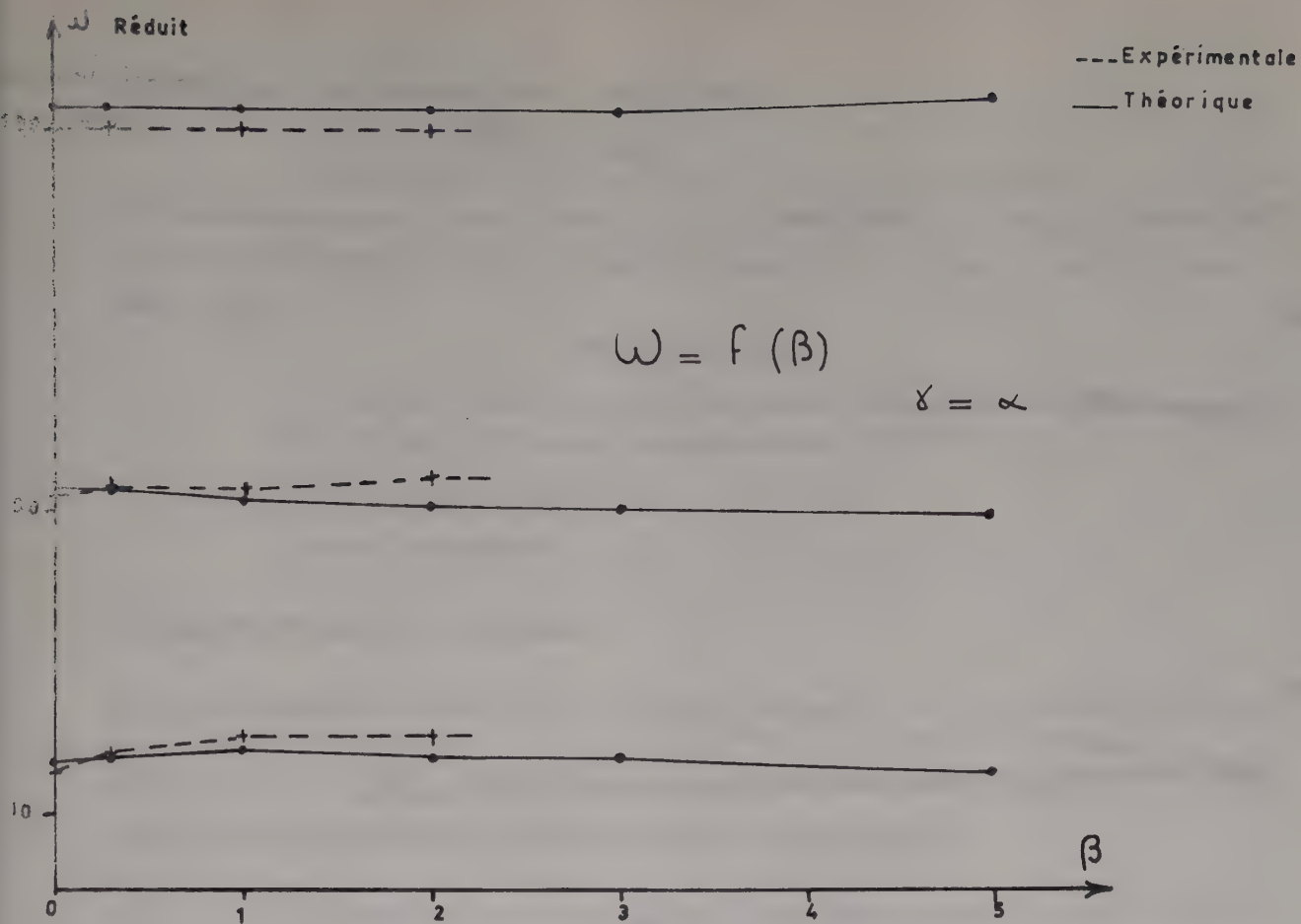
Les instabilités ont été relevées en faisant varier lentement la charge de compression à couple de torsion fixé.

	Résultats théoriques ω ou $p = 0$	Résultats expérimentaux
$\beta = 0$	$\gamma = 24$	$\gamma = 24$
$\beta = 0,3$	$\gamma = 20,2$	$\gamma = 23$
$\beta = 1$	$\gamma = 15,3$	$\gamma = 18$
$\beta = 2$	$\gamma = 21$	$\gamma = 21,6$

--- Expérimentale
— Théorique

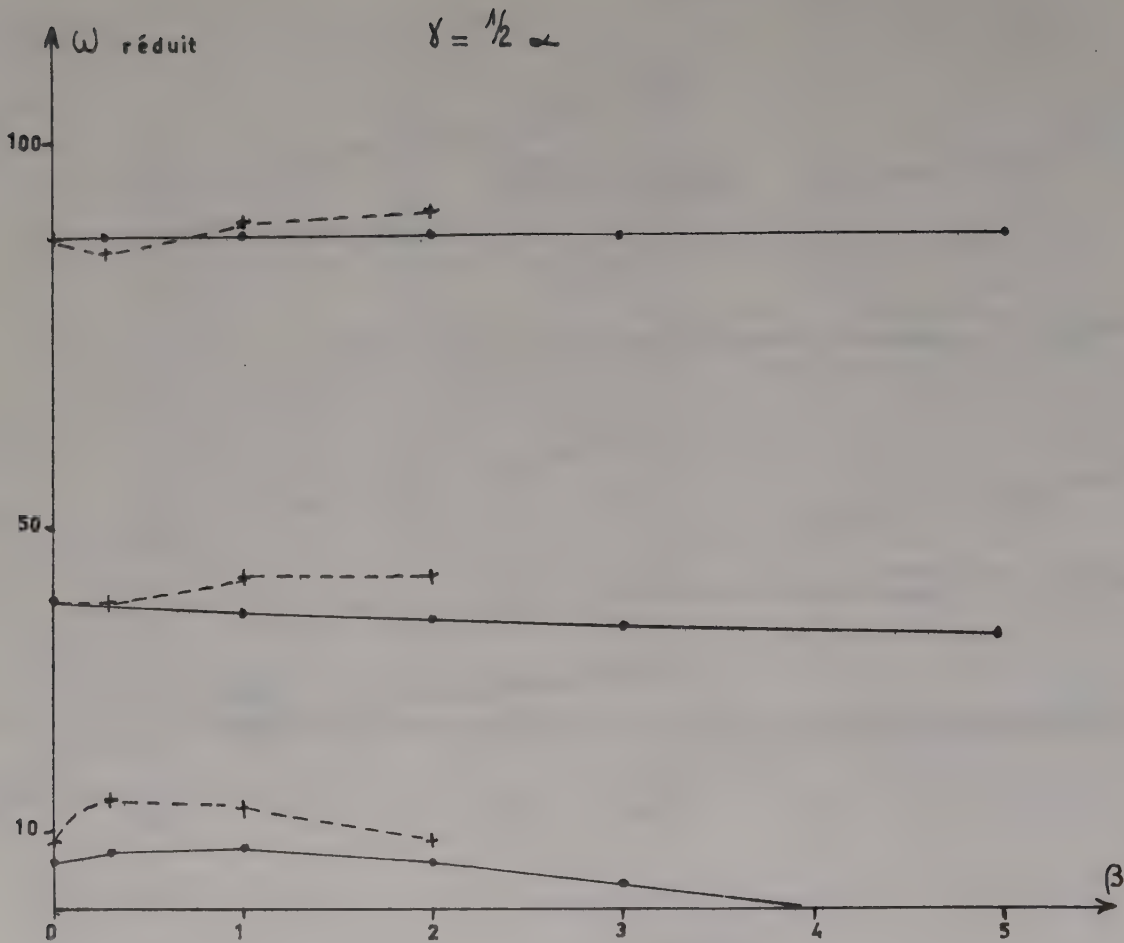
$$\omega = f(\gamma)$$





--- Expériment
 ——— Théorique

$$\omega = f(\beta)$$



II.3 - Résultats relatifs à la position des noeuds -

Les résultats théoriques ont été calculés pour $\alpha = 80$ et sur notre maquette $\alpha = 58,6$. Compte tenu de l'évolution des pulsations en fonction de α entre 58,6 et 80, nous avons considéré que la position des noeuds de vibration était sensiblement la même pour $\alpha = 80$ et $\alpha = 58,6$ et c'est aux valeurs théoriques relatives à $\alpha = 80$ que nous avons comparé nos résultats.

Les noeuds ont été détectés en déplaçant un capteur le long de la poutre pour $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ et $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. x désigne la distance du noeud à l'extrémité supérieure.

	$\gamma = \alpha \quad \beta = 0$			$\gamma = \frac{\alpha}{2} \quad \beta = 0$		
	Résultats expérimentaux	Valeurs théoriques	Ecart relatif	Résultats expérimentaux	Valeur théorique	Ecart relatif
ω_2	$x = 1,35\text{m}$	1,345	0,37 %	1,40	1,38	1,43 %
ω_3	$x_1 = 0,9 \text{ lm}$	0,88	3,3 %	0,985m	0,88	10,2 %
	$x_2 = 1,7 \text{ lm}$	1,69	1,17 %	1,72	1,71	0,58 %

II.4 - Résultats relatifs au coefficient d'amortissement -

La mesure du coefficient ζ , a été faite sur des courbes de résonance par une méthode, critiquable dans la mesure où notre système est continu, en mesurant au voisinage de la résonance l'écart de pulsation séparant les points obtenus en coupant les courbes par une droite d'ordonnée égale au rapport

$$\frac{\text{amplitude maximum}}{\sqrt{2}}$$

Pour les basses pulsations, nous avons trouvé $\zeta = 0,033$.

Pour les résonances d'ordre élevé, $\zeta = 0,015$,

ce coefficient dépendant, semble-t-il, de l'amplitude.

III - Analyse des résultats et conclusion -

■ Si nous comparons les valeurs théoriques et expérimentales des courbes de pulsation en fonction de la quantité $\gamma = \frac{F_0 \ell^2}{EI}$, nous remarquons que ces quantités sont très voisines, la valeur expérimentale étant tantôt supérieure, tantôt inférieure à la valeur théorique.

Si P désigne le poids de la tige et F_c la force de compression, nous avons la relation:

$$F_0 = P - F_c \text{ soit } \gamma = \alpha - \frac{F_e \ell^2}{EI}$$

Le « flambement » étant caractérisé par une pulsation nulle, le système présente une stabilité d'autant plus grande que γ est faible pour la pulsation nulle.

Nous remarquons que la loi mise en évidence théoriquement selon laquelle γ décroît jusqu'à $\beta = 1$ environ, puis croît ensuite [Diagramme $\frac{\gamma}{\alpha} = f(\alpha)$] est bien vérifiée.

Ce résultat est aussi visible sur les courbes $\omega = f(\beta)$, la première pulsation propre présentant un maximum pour β voisin de l'unité. Nous remarquons aussi que les pulsations sont d'autant moins influencées par le couple que leur ordre est élevé.

■ Nous avons trouvé que l'instabilité était due au flambement, or si nous traçons sur les diagrammes

$[\Im(\frac{\lambda}{\pi})]^{\frac{1}{4}}$, $[\Re(\frac{\lambda}{\pi})]^{\frac{1}{4}}$, les droites à amortissement constant $\zeta = 0,033$, nous constatons que l'instabilité dynamique aurait dû apparaître avant le flambement,

pour β voisin de 0,15 si $\gamma = \alpha$

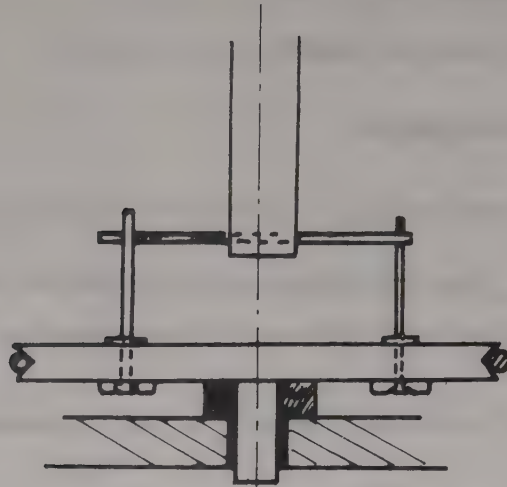
avant $\beta = 0,1$ pour $\gamma = \frac{3}{4}\alpha$ et $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$

ce type d'instabilité n'est pas apparu.

Nous avons estimé que ces anomalies étaient dues au frottement sec.

Une seconde maquette a été expérimentée. Nous avons apporté les modifications suivantes :

- l'axe du dispositif permettant d'exercer la force de compression a été monté sur un roulement à billes, ce qui devait diminuer les jeux et les frottements,
- la liaison à l'extrémité inférieure a été remplacée par une rotule,
- la poulie, initialement calée sur l'arbre, a été montée sur un axe indépendant vertical et exerçait le couple par un dispositif du type « fourchette » conformément à la figure.



L'instabilité est apparue plus tôt comme le montrent les résultats ci-dessous, ce qui est en accord qualitatif avec notre théorie :

β	γ	
	Première maquette	Deuxième maquette
0	24	33,15
0,1		31,45
0,2		30,15
0,3	23	28,75

Nous avons fait plusieurs enregistrements d'oscillations libres et nous avons trouvé un coefficient d'amortissement moyen

$$\zeta = 0,045$$

Le frottement sec étant nettement visible aux faibles amplitudes décroissant toujours linéairement.

■ En ce qui concerne la position des noeuds, l'accord est excellent sauf pour la troisième forme propre où l'on relève sur une mesure un écart de l'ordre de 10 % mais le capteur et l'excitateur étaient très voisins du noeud et les mesures très difficiles à faire.

En conclusion, compte tenu des erreurs de mesures inévitables et des erreurs de données (sur le module d'Young en particulier) , nous pouvons considérer que :

- la stabilité est très affectée par les forces d'amortissement, le frottement sec ayant un effet stabilisateur très net et faisant disparaître l'instabilité dynamique,
- le couple a un effet nettement déstabilisant,
- l'accord est bon entre la théorie et les résultats expérimentaux pour les pulsations de résonance, les déformations et la stabilité au flambement.

Le tube n'était évidemment pas parfaitement conforme au schéma que nous avons utilisé, ainsi les dispositifs de liaison aux extrémités et la perturbation massique due aux systèmes de mesures n'ont pas été pris en compte.



B I B L I O G R A P H I E

- [1] CHIEN - HENG - WU (University of Minesota)
Critical Speed of a rotating drill shaft in a uniform casing
Text report ACF - PRF - Grant 1376 A2 - 21 - Octobre 1964

- [2] CODDINGTON E A LEVINSON W.
Theory of ordinary differentials equations
Mc Graw Hill Book Company p. 86 et p. 170 - 1955

- [3] LIN C.C.
On uniform valid asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation
Proceeding ninth Intemational Congress of applied mechanic Brussels I p. 136 - 148

- [4] WASOW. W.
A study of the solution of the differential equation :
 $y^{(4)} + \lambda^2(x y^{(2)} + y) = 0$ for large value of λ
Annals of Mathematics vol. 52 N° 2 - Sept. 1950 p. 350 - 361

- [5] RABENSTEIN , ALBERT L.
Asymptotics solutions of $U^{(4)} + \lambda^2(z U^{(2)} + \alpha U^{(1)} + \beta U) = 0$ for large $|\lambda|$.
Archives for rational mechanic and analysis vol.1 N° 5 1958 p. 418 - 435

- [6] GREENHILL A F
On the strength of shafting when exposed bath to torsion and end threest
Proceeding of institution of Mechanicals Engineers.
Vol. 6 - Londres - 1883 p. 182 - 209

- [7] KANTOROVICH and KRILOV
Approximatives methods of higher analysis - Noordhoff LTD 1958 - p. 258

- [8] T.R. BEAL (Alabama)
Dynamic Stability of a flexible missile under constant and pulsating thrust
A I A A Journal vol. 3 N° 3 Mars 1965 p. 486 - 495

- [9] Y. PIRONNEAU - A. KERBRAT
Contribution à l'étude des systèmes en chaîne entraînés en rotation à l'intérieur d'un tube fixe
Annales de l'E.N.S.M. 1969 - deuxième semestre

Y. PIRONNEAU - A. KERBRAT - S. DUBIGEON
Etude d'un oscillateur du type pendule sphérique en oscillations forcées dans un cylindre.
Etude des chocs réguliers.
Annales de l'E.N.S.M. 1970 - premier semestre

- [9] A. KERBRAT
Contribution à l'étude de systèmes en chaîne entraînés en rotation à l'intérieur d'un tube fixe
Thèse de Docteur Ingénieur - juin 1970 - Université de Nantes
- [10] Joseph DANIEL D
Eigen value bounds for the Orr-Sommerfeld equation
Journal of Fluids mechanic 33-3 p. 617-621 Sept. 1968
- [11] TSENG HUANG and DONALD W DAREING
Buckling and frequencies of long vertical pipes
Journal of the Engineering Mechanics Division, proceedings of the American Society of Civil Engineers Vol. 95 N° E M 1 February 1969 p. 167 à 181
- [12] P I SHELUEV
Bending flutter of rotating elongated bodies
Mekhanika Tverdogo Tela N° 2 p. 160 - 165 (1966)
Mechanics of Solids - The Faraday Press Inc Vol. 1 N° 2 Mars Avril 1966 p. 114 - 118
- [13] HANS ZIEGLER
On the concept of elastic stability
Advances in applied mechanics vol. IV Academic Press 1956 - p. 351 - 403
- [14] R.L. ESHLEMAN - R.A. EUBANKS
On the critical speeds of a continuous rotor
Transaction of the ASME - Journal of Engineering for Industry - Série B - 91-4 Nov. 1969
p. 1180 - 1188
- [15] Gérard PETIAU
La théorie des fonctions de Bessel - Editions du C.N.R.S. (1955)

